Concours ESTP-ENSAM-ECRIN-ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 3
Filière PC
durée 4 heures

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème A

Si $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients réels et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$.

Un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est noté $(a_{i,j})$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$.

Un vecteur de $\mathbb{R}^p$, rapporté à sa base canonique, et sa matrice dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ sont notés par la même lettre.

Si N est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, la suite $(A_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ admet une limite B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite réelle $(N(A_n - B))_n$ a pour limite 0.

On note :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = B \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} N(A_n - B) = 0.$$

Les coefficients de la matrice limite B sont les limites des coefficients de la matrice A_n.

Partie I

On admettra que l'application, notée $\|\|$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \|A\| = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{q} |a_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, adoptée dans la suite du problème et telle que , $\forall r \in N^*$ (avec un abus d'écriture évident) :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| .$$

1) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ et $\rho(A) = \max\limits_{1\leq i\leq p} |\lambda_i|$.

   Montrer que :

   $$\forall i \in [1,p]_{\mathbb{N}}, \forall k \in \mathbb{N}^*, |\lambda_i|^k \leq \left\|A^k\right\| .$$

   En déduire que si A est diagonalisable alors :

   $$\lim_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

   (0 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).

2) $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, A inversible.

   On considère une méthode de résolution approchée de l'équation $Ax = b$, où b est donné et x est l'inconnue.
   On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, avec M inversible et $M^{-1}N$ diagonalisable.
   L'équation $Ax = b$ équivaut à $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.
   On définit une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $(x^{(n)})_n$, où $n \in \mathbb{N}$ par :

   $$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b.$$

   a) Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de M, N, $x^{(0)}$ et de la solution x de l'équation $Ax = b$.

   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(x^{(n)})_n$ converge vers x.

Partie II

On donne la matrice $A \in \mathcal{M}_p(R)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} \forall i, 1 \leq i \leq p & a_{i,i} = 2; \\ \forall i, 2 \leq i \leq p & a_{i,i-1} = -1; \\ \forall i, 1 \leq i \leq p-1 & a_{i,i+1} = -1 \end{cases}$$

tous les autres coefficients étant nuls.

1) I_p désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, soit $D_p = \det(A - \lambda I_p)$.
   $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, trouver une relation entre D_p, D_{p-1}, D_{p-2} et λ.
   On prendra $D_0 = 1$ et $D_1 = 2 - \lambda$.
2) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice A.
   Montrer que $|\lambda - 2| \leq 2$ à l'aide de $\|A - 2I_p\|$.
3) On pose $2 - \lambda = 2\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
   Calculer D_p en fonction de p et θ. Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
   En déduire les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Partie III

Dans la décomposition $A = M - N$ donnée au **I 2)**, A est la matrice du **II** et l'on pose $M = 2I_p$, d'où $N = 2I_p - A$ où I_p désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $J = M^{-1}N$, $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On reprend la méthode itérative de **I 2)**.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter la matrice $x^{(n+1)}$ en fonction de la matrice $x^{(n)}$ et de la matrice b. Préciser tous ses éléments.
2) Trouver les valeurs propres de J et calculer $\rho(J)$, ρ ayant été défini au **I 1)**. La suite $(x^{(n)})_n$ est-elle convergente ?
3) Montrer que :
   $$1 - \rho(J) \leq \frac{\pi^2}{2p^2}.$$
   Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'utilisation de la méthode dans ce cas ?

Problème B

Partie I

1) Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On note f l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}\cos(yt)}{t}.$$
   Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer que $\forall t \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - \cos(yt) \leq |y|\, t$ et en déduire que :
   $$\forall t > 0, |f(t)| \leq \frac{\left|e^{(x-1)t} - 1\right|}{t} + |y|.$$

3) Soit $x > 0$; $\forall y \in \mathbb{R}$ on note :

$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}\cos(yt)}{t}dt$$

et F_x l'application :

$$F_x : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto F(x,y). \end{array}$$

a) Montrer que F_x est continue sur $\mathbb{R}$ (On pourra distinguer $t > 1$ et $t < 1$). On énoncera avec grande précision le théorème utilisé.

b) Montrer que F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\forall y \in \mathbb{R}, F_x'(y)$.

c) Démontrer que : $\forall \epsilon > 0$

$$\int_\epsilon^{+\infty} \left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right) dt = \int_\epsilon^{\epsilon x} \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

En déduire $F_x(0)$ puis $F(x,y)$.

Partie II.

1) a) Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Montrer l'existence de

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\cos(yt)}{t}dt,$$

puis celle de

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t}dt.$$

On pose encore :

$$F(0,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t}dt.$$

b) Soit $y > 0$ et $z > 0$. Montrer que l'application h de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t > 0, h(t) = e^{-tz}\frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. Dans la suite $y > 0$.

c) Montrer l'existence de :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t}dt.$$

On note H l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall z \in]0,+\infty[\,, H(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}\frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t}dt \text{ et } H(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t}dt$$

2) Montrer que H est continue sur $]0,+\infty[$.

3) Déterminer $\lim_{z\to+\infty} H(z)$.

4) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et en déduire la valeur de $H(z)$ pour $z > 0$.

5) Pour $t\geq 0$, on pose :

$$\varphi(t) = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{y}} - \cos(u)}{u}du.$$

a) Montrer que $\forall z > 0$ l'application $t \mapsto e^{-tz}\varphi(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$H(z) = H(0) - z\int_0^{+\infty} e^{-tz}\varphi(t)dt.$$

b) En déduire que H est continue en 0 (on pourra remarquer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.)

6) Calculer $F(0, y)$ pour $y \in \mathbb{R}^*$.