

# MATHÉMATIQUES

## Problème

L'épreuve est constituée de trois parties, et propose l'étude de quelques propriétés de la fonction  $J_0$  de Bessel (utilisée notamment en physique).

### Partie I

Étude de la fonction  $J = J_0$  de Bessel. Développement en série entière

ø1 Pour tout  $x \in ]-\pi, \pi[$ , on pose :  $J(x) = [1/(\pi)] \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(\theta)) d\theta$ .

(a) Montrer que pour tout  $x \in ]-\pi, \pi[$ , on a :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \cdot \sin(\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(\theta)) d\theta$$

(b) Montrer que la fonction  $J : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi définie est continue, paire et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]-\pi, \pi[$ .

(c) Justifier que  $J$  est bornée sur  $]-\pi, \pi[$ .

(d) Justifier l'encadrement :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \leq \theta$$

En déduire un encadrement de  $J(x)$  pour  $x \in ]0, 2]$ .

(e) Préciser les valeurs de  $J(0)$ ,  $J'(0)$ . Montrer que  $J$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ .

ø2 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^{[\pi/2]} \sin^{2n}(\theta) d\theta$ .

(a) Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $(2n+1) I_n = 2(n+1) I_{n+1}$ .

(b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ .

ø3 (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction  $\cos$  et son rayon de convergence. En déduire que pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  fixé, l'application  $x \rightarrow \cos(x \cdot \sin(\theta))$  est développable en série entière sur  $]-\pi, \pi[$ , et préciser ce développement.

(b) En déduire que  $J$  est développable en série entière sur  $]-\pi, \pi[$ , avec :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

(on précisera le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

**Les deux parties suivantes sont indépendantes.**

## Partie II

*Étude d'une équation différentielle*

ø4 Vérifier que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad x \left( J(x) + J''(x) \right) + J'(x) = 0.$$

ø5 Montrer que l'ensemble des applications de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ , développables en série entière sur  $]0, +\infty[$  et solutions sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle :  $xy'' + y' + xy = 0$ , est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par  $J$ .

ø6 Soit  $K \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ , solution sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle :  $xy'' + y' + xy = 0$ .

Pour tout  $x > 0$  on pose :  $W(x) = J'(x)K(x) - J(x)K'(x)$ .

Montrer que  $W \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ , et est telle que pour tout  $x > 0$ , on ait :  $W'(x) = -\frac{1}{x} W(x)$ .

En déduire la forme de  $W$ .

ø7 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \dots$

(a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{H_{n+1}}{H_n} \right) = 1$ .

(b) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2} \right] x^{2n}$ .

Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à  $+\infty$ . Pour tout réel  $x$ , expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression  $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$  et la comparer avec  $-2J'(x)$ .

(c) Pour tout  $x > 0$ , on pose :  $K(x) = \ln(x) J(x) + \varphi(x)$ .

Vérifier que  $K$  est solution sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle :  $xy'' + y' + xy = 0$ , et expliciter la fonction  $W$  associée définie au ø6

Que peut-on en déduire ?

## Partie III

*Usage de la transformation de Laplace*

ø8 (a) Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et tout  $y > 0$  :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy} dx = \frac{n!}{y^{n+1}} \quad \text{pour } y > 0$$

(b) Montrer que pour tout  $y > 0$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} J_0(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{y} e^{-1/4y}$$

(on pourra commencer par justifier l'existence de cette intégrale en utilisant par exemple le  $\delta 1$  (c), puis le développement en série entière de  $J$  vu en  $\delta 3$  (b) en précisant le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

$\delta 9$  (a) Justifier pour  $y > 0$  l'existence de  $L(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} J(x) dx$ .

(b) Montrer que la fonction  $L$  ainsi définie est une application continue sur  $]0, +\infty[$  vérifiant  $\lim_{y \rightarrow +\infty} L(y) = 0$ .

$\delta 10$  (a) Déterminer et justifier le développement en série entière sur  $] -1, 1[$  de la fonction  $h : u \rightarrow [1/\sqrt{1+u^2}]$

(b) Utiliser le développement en série entière de  $J$  vu au  $\delta 3$  (b) afin de montrer que, pour tout  $y \in ]1, +\infty[$ ,  $L(y) = [1/\sqrt{1+y^2}]$

$\delta 11$  Soit  $y > 0$  fixé.

(a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $L_n(y) = \int_0^n e^{-xy} J(x) dx$ . Montrer que :

$$|L_n(y) - L(y)| \leq \frac{e^{-ny}}{y}$$

(b) En remarquant que  $[ (\pi)/2 ] L_n(y) =$

$\Re \left( \int_0^{(\pi)/2} \left( \int_0^n e^{x(-y+i\sin(\theta))} dx \right) d\theta \right)$ , montrer que :

$$\frac{\pi}{2} L_n(y) = \Re \left( \int_0^{(\pi)/2} \frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)} d\theta + \int_0^{(\pi)/2} \frac{1}{y-i\sin(\theta)} d\theta \right)$$

(c) Montrer que :

$$\left| \int_0^{(\pi)/2} \frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)} d\theta \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{e^{-ny}}{y}$$

(d) Par un passage à la limite, en déduire que, pour tout  $y > 0$ , on a :

$$L(y) = \frac{2y}{\pi} \int_0^{(\pi/2)} \frac{1}{y^2 + \sin^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par  $u = \tan(\theta)$ ).

---