e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 PC

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

On note sh la fonction d'une variable réelle définie par $\mathrm{sh}(t) = (e^t - e^{-t})/2$.

On note α le réel $\ln(1+\sqrt{2})$.

On considère la suite $I = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^\alpha (\mathrm{sh}t)^n dt.$$

1°. *Limite de la suite I.*

(a) Résoudre l'équation $\mathrm{sh}t = 1$.

(b) Soit t dans $[0, \alpha[$. Etudier la limite de la suite $((\mathrm{sh}(t))^n)_{n\geqslant 0}$.

(c) A l'aide du théorème de convergence dominée (dont on rappellera l'énoncé), déterminer la limite de la suite I.

Tournez la page S.V.P.

2°. *Equivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

(a) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

(b) Démontrer que la suite I est décroissante et déduire de la relation précédente un encadrement de I_n.

(c) Déduire des résultats précédents un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3°. *Etude des séries $\sum I_n$ et $\sum(-1)^n I_n$.*

(a) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

(b) Montrer que la série $\sum(-1)^n I_n$ est convergente et que sa somme vaut :

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\mathrm{sh}(t)} dt.$$

Exercice 2

Soit H une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$.
Pour tout réel non nul λ, on pose :

$$J(\lambda) = \int_0^1 H(t)\cos(\lambda t)dt.$$

1°. Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$.

2°. Soit f la fonction (2π-périodique) de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin t|$.

(a) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

(b) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ (on citera précisément le théorème utilisé).

3°. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties qu'il existe une constante k dépendant de H telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, |J(\lambda)| \leqslant k|\lambda^{-1}|.$$

4°. A l'aide des résultats précédents, établir que:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 H(t)|\sin(\lambda t)|dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 H(t)dt.$$

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une application linéaire f définie sur E telle qu'il existe $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de vecteurs de E vérifiant :

pour tout i dans $\{1, 2, ..., n-1\}$, $f(u_i) = u_{i+1}$ et $f(u_n) = u_1$.

On suppose de plus que $u_i \neq u_1$, pour i $(2 \leqslant i \leqslant n)$.

1°. *Etude de la famille* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$.

(a) Montrer que les n éléments de la famille $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ sont deux à deux distincts.

(b) On se propose de démontrer par l'absurde que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Soit α un réel tel que $u_2 = \alpha u_1$. Montrer que $\alpha^n = 1$ et en déduire une contradiction.

(c) Déduire des résultats précédents que $f^n = Id$.

2°. On suppose dans cette question que $n = 4$. Dans la base (u_1, u_2) de E, on note $U = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ la matrice de f.

(a) Calculer U^4 et en déduire que $b = 0$ et $a^2 = 1$.

(b) Démontrer que $a = -1$.

(c) Déterminer l'image du vecteur $\Omega = \sum_{i=1}^{4} u_i$ par f et en déduire que $\Omega = 0$.