e 4 a

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques 1
durée 4 heures

Les deuxième, troisième et quatrième parties **sont liées** et peuvent être traitées **indépendamment** de la première partie.

Notations :

Dans tout le problème n et k sont deux entiers naturels donnés de somme N.
La fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie par $h(x) = x^{n+k+1}$.
Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 ; la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de 0 signifie qu'il existe deux réels strictement positifs M et α tels que :
$\forall x \in I \cap]-\alpha, +\alpha[, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|$
$\mathbb{R}_n[X]$ (resp$^{\underline{t}}$ $\mathbb{R}_k[X]$) désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n (resp k).
$\mathcal{F}_{n,k}$ est l'ensemble des fractions rationnelles défini par :

$$\mathcal{F}_{n,k} = \{u = \frac{p}{q}\,,\ p \in \mathbb{R}_n[X]\,,\ q \in \mathbb{R}_k[X]\,,\ q(0) \neq 0\}$$

Les coefficients de p (resp$^{\underline{t}}$ q) seront notés $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ (resp$^{\underline{t}}$ $\{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$ où $b_0 \neq 0$)

Première partie :

Dans cette partie $b_0 = 1$. Soit f une fonction à valeurs réelles, égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, de rayon de convergence ρ strictement positif.

Il s'agit de rechercher un élément u de $\mathcal{F}_{n,k}$ tel que la fonction $(f - u)$ soit dominée par la fonction h au voisinage de 0. La fonction u étant égale au quotient des deux polynômes p et q, la question consiste à déterminer, à partir des c_i, les coefficients $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ de p et les coefficients $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ de q de sorte que :

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, N\}\ , \quad f^{(j)}(0) = u^{(j)}(0)$$

1) Montrer que cette condition équivaut au fait que le "numérateur" $f(x)q(x) - p(x)$ de $f(x) - u(x)$ n'admet aucun terme de degré inférieur ou égal à N dans son développement en série entière.

2)

2-1) Avec la convention que $c_i = 0$ pour $i < 0$, $a_i = 0$ pour $i > n$ et $b_i = 0$ pour $i > k$, vérifier que le système (1) suivant permet d'obtenir les coefficients $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ et $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ de la fraction rationnelle u.

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, N\}, \quad \sum_{j=0}^{j=i} b_j c_{i-j} = a_i \qquad (1)$$

2-1) Mette ce système sous la forme qui suit :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{j=Min(i,k)} c_{i-j} b_j = a_i & i = 0, 1, \dots, n \qquad (2) \\ \sum_{j=0}^{j=k} c_{n+i-j} b_j = 0 & i = 1, 2, \dots, k \qquad (3) \end{cases}$$

3)

3-1) En tenant compte du fait que $b_0 = 1$, montrer que (3) détermine les coefficients $\{b_1, \dots, b_k\}$ de manière unique si et seulement si la matrice carrée :

$$M_{n,k}(f) = \left[c_{n+i-j}\right]_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}$$

est inversible.

3-2) Vérifier que dans ces conditions les relations (2) donnent les coefficients $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

La fonction u ainsi obtenue se notera $F_k^n(f)$.

3-3) Montrer que la fonction $(f - F_k^n(f))$ est dominée par h au voisinage de 0.

4) Dans cette question $f(x) = \ln(1 + x),\ n = 2,\ k = 2$.

4-1) Déterminer les coefficients $\{c_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, le réel ρ et la matrice $M_{2,2}(f)$.

4-2) Déterminer alors la fonction $F_2^2(f)$.

4-3) Calculer exactement, $\sum_{j=0}^{j=4} c_j$ et $F_2^2(f)(1)$.

5) Dans cette question $f(x) = e^{-x},\ n = 3,\ k = 2$.

Exprimer la matrice $M_{3,2}(f)$, déterminer p et la fonction $F_2^3(f)$.

Deuxième partie :

La fonction f_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par $f_1(x) = e^x$.
Lorsque cela aura un sens, $A(x)$ et $B(x)$ seront définis par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} t^k (t + x)^n e^{-t}\, dt \qquad \text{et} \qquad B(x) = \int_0^{+\infty} (t - x)^k t^n e^{-t}\, dt$$

1) Question préliminaire :

Calculer $\beta(n, k) = \int_0^1 u^n (1-u)^k\, du$ et, pour tout entier naturel j, étudier l'existence et indiquer la valeur éventuelle de $\int_0^{+\infty} t^j e^{-t}\, dt$.

2) Déterminer le développement de f_1 en série entière et étudier sa convergence. Soit S_k la somme partielle de rang k de ce développement. Exprimer $S_k(x)$.

Dans la suite de cette partie $I =]-1,\ 1[$

3) Montrer que $A(x)$ et $B(x)$ existent lorsque x est donné dans $]-1,\ 1[$.

4) Montrer que A (resp$\stackrel{t}{-}$ B) définit une fonction polynomiale sur I de degré n (resp$\stackrel{t}{-}$ k) et que $B(0) \neq 0$.

5) g est la fonction de $]-1,\ 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f_1(x)B(x) - A(x)$

5-1) Vérifier que $\forall x \in\ ]-1,\ 1[, \quad g(x) = -\displaystyle\int_0^{-x} t^k(t+x)^n e^{-t}\,dt$

5-2) En déduire que $\forall x \in\ ]-1,\ 1[, \quad g(x) = (-1)^k x^{n+k+1} \displaystyle\int_0^1 u^k(1-u)^n e^{ux}\,du$

5-3) Montrer que la fonction g est dominée par la fonction h au voisinage de 0.

Troisième partie :

Dans cette partie, $n = 0$ et le réel x est fixé dans $[0\ +\infty[$.

1) Vérifier que $A(-x)$ et $B(-x)$ existent. Calculer $A(-x)$.

2) Montrer que

$$\frac{A(-x)}{B(-x)} = \frac{1}{S_k(x)}$$

3) Établir que

$$e^{-x} - \frac{A(-x)}{B(-x)} = \frac{-\displaystyle\int_0^x t^k e^{-t}\,dt}{\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+x)^k e^{-t}\,dt}$$

4) En utilisant

$$2^{-k}\int_0^x (2t)^k e^{-t}\,dt \leq 2^{-k}\int_0^x (t+x)^k e^{-t}\,dt$$

montrer que

$$\left|\frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{S_k(x)}\right| \leq 2^{-k}$$

Quatrième partie :

Dans cette partie le réel x est fixé dans $[0\ +\infty[$.
En outre, les entiers naturels n et k vérifient $k = 3n$.

1) Montrer que

$$e^{-x} - \frac{A(-x)}{B(-x)} = \frac{-\displaystyle\int_0^x t^k(t-x)^n e^{-t}\,dt}{\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+x)^k t^n e^{-t}\,dt}$$

2) Établir que $t(t+x)^3 = 27t^3(x-t) + t(x+7t)(x-2t)^2$
et en déduire que :

$$\left|\frac{1}{f_1(x)} - \frac{A(-x)}{B(-x)}\right| \leq 3^{-k}$$