e4a
concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS- ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2
durée 4 heures

Exercice 1

1) Soient a et b deux réels, $a < b$, et soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.
Montrer que :
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx.$$

2) Soit g l'application de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
Montrer que g'' est intégrable sur $[1,+\infty[$.

3) Pour n entier naturel non nul on pose :
$$u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}},\ v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx,\ w_n = v_n - \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

a) Montrer que w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 2\cos 1 - 2\cos\sqrt{n+1}.$$
Prouver que la suite $(\cos n)$ n'est pas convergente.
En déduire la nature de la série de terme général v_n.

c) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

On note ln la fonction logarithme népérien.
Soit n un entier naturel non nul.

1) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non vides, non réduits à un point.
On considère une suite (f_n) d'applications de I dans J, une application f de I dans J et une application g de J dans $\mathbb{R}$.
On suppose que g est uniformément continue sur J et que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
Montrer que la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément sur I vers $g \circ f$.

2) Soit φ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Déterminer le réel L tel que : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

b) Soit A un réel strictement positif.

i) Justifier l'existence d'un entier naturel non nul N tel que, pour tout n, $n \geq N$, pour tout k élément de $\{0,1,2,\ldots,n\}$ et tout x de $[-A,A]$, on ait :
$$\left|\frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

ii) Établir que pour tout t élément de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$0 \leq t - \ln(1+t) \leq t^2.$$

iii) Pour $n \geq N$, on considère les applications u_n et v_n de $[-A, A]$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$x \mapsto u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right),\ x \mapsto v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[1 + \frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ converge uniformément sur $[-A, A]$ vers la fonction nulle.

iv) En déduire que la suite (v_n) converge uniformément sur $[-A, A]$ vers une application notée v.
Pour tout x de $[-A, A]$, exprimer $v(x)$ en fonction de L.

3) On pose :

$$I_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right] dx.$$

Étudier la convergence de la suite (I_n).

Exercice 3

Soit n un entier naturel.

Pour $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et l'on note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour k entier naturel, $0 \leq k \leq n$, on rappelle que le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est C_n^k avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients entiers relatifs.

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $A^m = I$.

Soit p le plus petit des entiers naturels k non nuls tels que $A^k = I$.

1) a) Montrer que m est un multiple de p.

b) Prouver que le déterminant de A est égal à 1 ou à -1.

c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et que les valeurs propres de A sont des racines p-ièmes de l'unité.

2) Soit $P_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de A.

a) Justifier l'assertion : "les coefficients de P_A sont des entiers relatifs".

b) Exprimer les coefficients a_k en fonction des valeurs propres de A.
En déduire que pour tout k élément de $\{0, 1, \ldots, n\}$ on a :

$$|a_k| \leq C_n^k.$$

3) On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) Montrer que A est semblable à l'une des six matrices suivantes :

$$I,\ -I,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \overline{j} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\overline{j} \end{pmatrix} \text{ où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } \overline{j} \text{ est le conjugué de } j.$$

b) En déduire quep ne peut prendre que cinq valeurs que l'on précisera.

c) Pour chacune de ces valeurs de p autres que $p = 1$, indiquer une matrice A à coefficients entiers relatifs et telle que :

$$A^p = I \text{ et } A^k \neq I \text{ pourtout } k \text{ élément de } \{1, \ldots, p-1\}.$$

4) Dans le cas général, montrer que p ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et indiquer une méthode permettant de déterminer des valeurs possibles pour p.

Exercice 4

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes en l'indéterminée X à coefficients complexes, on considère un élément P de degré au moins égal à 1.
   On note P' le polynôme dérivé de P et R le reste de la division euclidienne de P par P'.
   Démontrer que les racines multiples de P sont les racines communes à P' et R.
2) On prend $P = X^3 + pX + q$ où p et q sont des complexes donnés.
   a) Déterminer l'ensemble (γ) des racines communes à P' et R.
   b) En déduire que P admet exactement deux racines distinctes si et seulement si :
   $$4p^3 + 27q^2 = 0 \text{ et } pq \neq 0.$$
   Préciser alors ces racines.
   Que peut-on dire de ces racines si p et q sont réels ?
3) Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   On note $M(x, y)$ le point du plan de coordonnées (x, y).
   Pour tout réel λ, on désigne par d_λ la droite d'équation :
   $$2x + \lambda y + \lambda^3 - 2 = 0.$$
   On note (δ) la famille des droites d_λ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que la droite d_λ passe par le point $M(a, b)$ si et seulement si λ est racine du polynôme $X^3 + bX + 2a - 2$.
   Préciser le nombre de droites de la famille (δ) passant par $A(1, 0)$.
   b) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points du plan par lesquels passent exactement deux droites distinctes de la famille (δ).
   c) Déterminer la partie (φ) de $(\mathcal{E})$ des points du plan par lesquels passent exactement deux droites orthogonales de la famille (δ).
   d) Représenter $(\mathcal{E})$ et (φ).