Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1
durée 4 heures

Notations :

n et q sont des entiers naturels donnés.

$\mathcal{M}(n, q)$ désigne lensemble des matrices réelles ou complexes à n lignes et q colonnes.

I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et s un élément de I. Le réel 0 est supposé appartenir à lintervalle I.

Une fonction matricielle de type (n, q) définie sur I est une application M de I vers $\mathcal{M}(n, q)$, $M = [m_{i,j}]$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq q)$ où, pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q , $m_{i,j}$ est une application de I vers $\mathbb{R}$ qui au réel t associe le réel $m_{i,j}(t)$.

Soient $M = [m_{i,j}]$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq q)$ et $L = [l_{i,j}]$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq q)$ deux fonctions matricielles de type (n, q) définies sur I. La notation $M = L$ signifie que pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q, $m_{i,j} = l_{i,j}$ (égalité entre deux applications de I vers $\mathbb{R}$).

La fonction matricielle M de type (n, q) définie sur I est continue en s (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ en s) si chaque fonction réelle $m_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq q)$ est continue en s (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ en s) et la fonction matricielle dérivée est définie en s par :

$$\frac{dM}{dt}(s) = \left[\frac{dm_{i,j}(s)}{dt}\right], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$$

et de même pour les dérivées dordre supérieur si elles existent.

La fonction matricielle M de type (n, q) définie sur I est continue sur I (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ sur I) si elle est continue (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$) en tout point de I.

Lintégrale définie de la fonction matricielle M continue sur I, entre les bornes α et β de I est la matrice réelle à n lignes et q colonnes définie par :

$$\int_\alpha^\beta M(u)du = \left[\int_\alpha^\beta m_{i,j}(u)du\right], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$$

Première partie :

Le produit de deux matrices M_l et M_2 de $\mathcal{M}(n, n)$ est noté $M_l.M_2$.

Question 1 : α et β désignent deux éléments de 1 tels que $\alpha < \beta$ et C est une matrice de $\mathcal{M}(n, n)$. La fonction matricielle M de type (n, n) étant supposée continue sur I, montrer que :

$$\int_\alpha^\beta (C.M)(u)du = C.\int_\alpha^\beta M(u)du$$

Question 2 : Soient $F = [f_{i,j}]$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ et $G = [g_{i,j}]$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ deux fonctions matricielles dérivables de type (n, n) définies sur I. Montrer que le produit matriciel $F.G$ définit une nouvelle fonction matricielle dérivable de type (n, n) sur I et que

$$\frac{d(F.G)}{dt} = \frac{dF}{dt}.G + F.\frac{dG}{dt}$$

Question 3 : s désigne un élément de I.

Soit $H = [h_{i,j}]$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ une fonction matricielle dérivable de type (n, n) définie sur I et telle que la matrice $H(s)$ soit inversible, d'inverse $H^{-1}(s)$. Montrer que la fonction matricielle H^{-1} est définie et dérivable sur un voisinage V de s et vérifie :

$$\forall u \in V, \frac{d(H^{-1})}{dt}(u) = -H^{-1}(u).\frac{dH}{dt}(u).H^{-1}(u)$$

Seconde Partie :

I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Soit A une matrice réelle à n lignes et n colonnes admettant les valeurs propres (réelles ou complexes) λ_1, λ_2, ..., λ_n, chacune apparaissant avec son ordre de multiplicité. Les matrices A_0, A_1, ..., A_n sont définies par :

$$A_0 = I_n \text{ et } A_k = A_{k-1}.(A - \lambda_k I_n),\ 1 \leq k \leq n$$

r_1, r_2, ..., r_n désignent les applications de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définies par :

$$\frac{dr_1}{dt}(t) = \lambda_1 r_1(t) \text{ et } r_1(0) = 1$$

$$\frac{dr_k}{dt}(t) = \lambda_k r_k(t) + r_{k-1}(t) \text{ et } r_k(0) = 0,\ 2 \leq k \leq n$$

Soit M la fonction matricielle de type (n, n) définie sur I par :

$$\forall t \in I, M(t) = \sum_{j=1}^{j=n} r_j(t).A_{j-1}$$

Question 1 : Déterminer la matrice M lorsque $n = 1$.

L'entier n est maintenant quelconque.

Question 2 : Expliciter la matrice A_n.

Question 3 : Déterminer la matrice $M(0)$.

Question 4 : Vérifier légalité suivante :

$$\frac{dM}{dt}(t) - \lambda_n M(t) = \sum_{j=0}^{j=n-2} r_{j+1}(t).\left[(\lambda_{j+1} - \lambda_n).A_j + A_{j+1}\right]$$

Question 5 : En déduire que

$$\forall t \in I, \frac{dM}{dt}(t) = A.M(t)$$

Question 6 : Déterminer une fonction matricielle Φ_A, dérivable de type (n, n) définie sur I et vérifiant :

$$\forall t \in I, \frac{d\Phi_A}{dt}(t) = A.\Phi_A(t) \text{ et } \Phi_A(0) = I_n$$

Prouver lunicité de Φ_A et exprimer Φ_A en fonction de la matrice M.

Question 7 : Application numérique :

Déterminer $\Phi_A(t)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 8 : α et β non nul sont deux réels et $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Donner une interprétation géométrique de lapplication linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ représentée par la matrice $\Phi_A(t)$ dans une base orthonormée $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Troisième partie :

Dans cette partie, les preuves seront fondées sur la définition de la matrice Φ_A donnée en deuxième partie. Lentier n est quelconque, A et B sont deux matrices réelles à n lignes et n colonnes . u et v sont deux éléments de lintervalle I.

Question 1 : Prouver que $\Phi_A(u + v) = \Phi_A(u).\Phi_A(v)$.

Question 2 : Montrer que $\Phi_A(u)$ est inversible et donner son inverse.

Question 3 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comparer $A.B$ et $B.A$.

Calculer et comparer $\Phi_{A+B}(u)$ et $\Phi_A(u).\Phi_B(u)$.

Question 4 : Dans le cas où les matrices A et B sont permutables (cest à dire $A.B = B.A$) , prouver que $\Phi_{A+B}(u) = \Phi_A(u).\Phi_B(u)$.

Quatrième partie :

α est un élément de I. A est une matrice donnée dans $\mathcal{M}(n,n)$.

Question 1 : Dans cette question, pour tout i de 1 à n, et tout j de 1 à n, $q_{i,j}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I^2 vers $\mathbb{R}$ (qui associe au couple (t,s) de I^2 le réel $q_{i,j}(t,s)$). Soit Q la fonction matricielle réelle à deux variables de type (n,n) définie sur I^2 par

$$Q = [q_{i,j}](1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$$

Montrer l'égalité matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\alpha^t Q(t,s)ds\right] = Q(t,t) + \int_\alpha^t \frac{\partial Q}{\partial t}(t,s)ds$$

Il sera opportun d'introduire L, fonction matricielle réelle à deux variables de type (n,n) définie sur I^2 par

$$\forall (t,s) \in I^2, R(t,s) = \Phi_A(t).(\Phi_A)^{-1}(s)$$

Question 2 : Soit, une fonction matricielle continue B, de type $(n,1)$ définie sur I et une matrice D unicolonne à n lignes.

La fonction matricielle R à deux variables, de type (n,n) définie sur I^2 est donnée par

$$\forall (t,s) \in I^2, R(t,s) = \Phi_A(t).(\Phi_A)^{-1}(s)$$

Montrer que la fonction matricielle Y de type $(n,1)$ définie sur I, solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = A.Y(t) + B \\ Y(0) = D \end{cases}$$

est unique et qu'elle est donnée par :

$$\forall t \in I, Y(t) = R(t,0).D + \int_0^t R(t,s).B(s)ds$$

Question 3 : Application lorsque $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la fonction matricielle Φ_A et donner la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = A.Y(t) + B \\ Y(0) = D \end{cases}$$