<u>Exercice 1</u>

P désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, k est un réel strictement positif. On note (x, y) le couple des coordonnées d'un point M de ***P***.
Soit (γ) l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne : $xy = k$.

1° On considère trois points *A, B, C* de (γ), deux à deux distincts, dont les abscisses sont notées *a, b, c* respectivement.

a) Déterminer les coordonnées (α, β) du centre de gravité *G* du triangle *ABC*.

b) Déterminer les coordonnées (λ, μ) de l'orthocentre *H* du triangle *ABC*.
Vérifier que *H* appartient à (γ).

2° On suppose, dans cette question, que *ABC* est un triangle équilatéral.

a) Que peut-on dire de *G* et *H* ?

b) Montrer que *a, b, c* sont les racines du polynôme $P(X)$ avec :
$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\,\frac{k^2}{\lambda^2} X + \frac{k^2}{\lambda}.$$

c) On appelle sommets de (γ) les points d'intersection de (γ) avec la droite d'équation : $y = x$. On suppose que *H* n'est pas l'un des sommets de (γ).
Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle *ABC* avec (γ) contient un point *D* distinct de *A, B, C*. Préciser les coordonnées de *D*.

3° Soit r un réel non nul et $Q(X)$ le polynôme défini par :
$$Q(X) = X^3 - 3r X^2 - 3\,\frac{k^2}{r^2} X + \frac{k^2}{r}.$$

a) Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$. En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées r_1, r_2, r_3.

b) Soient R_1, R_2, R_3 les points de (γ) d'abscisses respectives r_1, r_2, r_3.
Démontrer que le triangle $R_1 R_2 R_3$ est équilatéral.

4° Donner une construction géométrique permettant d'obtenir tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à (γ).

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ par : $(x,t)\to f(x,t)=e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\dfrac{t^3}{3}\right)$.

1° Pour x réel strictement positif fixé, montrer que l'application $t\to f(x,t)$ définie sur $[0,+\infty[$, est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2° Soit F l'application définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$x\to F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\ .$$

a) Prouver que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et, pour x strictement positif, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b) Montrer que F' est aussi définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F'(x)=\int_0^{+\infty} -t\,e^{-t^2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\,.$$

En déduire que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $F''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3° Montrer que F est solution sur $]0,+\infty[$de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x)-2\sqrt{x}\,y'(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,y(x)=0\ .$$

4° Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5° On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Déterminer un réel K tel que pour tout réel u :

$$|\cos u-1|\le K\,u^2$$

b) Justifier l'existence du réel J défini par : $J=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^6\,du$.

Pour x réel strictement positif, majorer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\left|\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)-1\right|dt$ en fonction de J et de x.

c) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/4}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

R est le corps des nombres réels, C celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. K$=$R ou K$=$C. On note E le K-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. O est la matrice nulle de E, I est la matrice identité de E. Pour M élément de E, ${}^tM$ et $tr(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M. On note F le K-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans K. Pour Y élément de F, ${}^tY$ désigne la matrice transposée de Y.

Soient A et B deux éléments de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in \mathrm{E} \quad , \quad f(M) = AM - MB.$$

<u>Première partie.</u> Dans cette partie K$=$C.

1° On suppose que A et B ont une valeur propre commune notée λ.

a) Justifier l'existence de Y et Z éléments non nuls de F vérifiant :

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.$$

b) Prouver que $Y\,{}^tZ$ est un élément non nul de E. Calculer $f(Y\,{}^tZ)$.

2° On suppose qu'il existe M_0 élément non nul de E tel que : $f(M_0) = O$.

a) Pour k entier naturel, prouver que : $A^k M_0 = M_0\, B^k$ .En déduire que pour tout polynôme P à coefficients complexes on a :

$$P(A)\, M_0 = M_0\, P(B).$$

b) Soit P_A le polynôme caractéristique de A. Que peut-on dire de $P_A(A)$?
En déduire que $P_A(B)$ n'est pas inversible dans E, et ensuite que A et B ont une valeur propre commune.

3° Démontrer que f est une bijection de E sur E si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.

4° En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que : $\mu = \alpha - \beta$.

<u>Deuxième partie.</u> Dans cette partie K$=$R.

1° Pour M et N appartenant à E, on pose : $\langle M \mid N \rangle = tr\left({}^tM\, N\right)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

2° On note f^* l'endomorphisme adjoint de f. Montrer que :

$$\forall M \in \mathrm{E} \ , \ f^*(M) = {}^tAM - M\,{}^tB.$$

3° a) Soit D appartenant à E vérifiant : $\forall M \in$ E , $DM = MD$. Prouver qu'il existe a dans R tel que : $D = aI$.

b) En déduire que f est l'application nulle si et seulement s'il existe a dans R tel que :

$$A = B = aI .$$

c) Démontrer que l'endomorphisme f est autoadjoint si et seulement si les matrices A et B sont symétriques.

4° a) On suppose que B est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que n est un entier pair.

b) On suppose de plus que A est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme $\frac{1}{\sqrt{2}} f$ est un endomorphisme orthogonal de E.

5° On considère le cas particulier : $n = 2$ .On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de f dans la base b de E, où $b = \left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right)$.

Vérifier les résultats démontrés aux questions 3° b), 3° c) et 4° b).