e4a (PSI) 2002
Epreuve de Mathématiques 1
durée 4 heures

Les calculatrices sont interdites.
Dans tout le problème, a et b désignent deux réels positifs tels que : $0 < a < b$.

Préliminaire.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On admettra dans tout le problème que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie 1.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x > 0 \ , \ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Question 1.

1.1. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^* \ , \ \forall x > 0 \ , \ u_n(x) \geq 0$.

1.2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

Question 2.

2.1. Prouver que S est dérivable sur $[a, b]$.

2.2. En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \ , \ \frac{dS}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Question 3.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln p + \gamma + o(1)$.

Question 4.

4.1. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{p} \Big(u_n(x+1) - u_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

4.2. En déduire que :

$$\forall x > 0 \ , \ S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

Question 5.

Soit φ la fonction définie de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp\Big(-\gamma x + S(x)\Big).$$

5.1. Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \varphi(x+1) = x\,\varphi(x)$.

5.2. Vérifier que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calculer $\dfrac{d\varphi}{dx}(x)$ pour $x>0$. Que vaut $\dfrac{d\varphi}{dx}(1)$?

Question 6.

Pour $n \geq 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x > 0\ ,\ \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Montrer que $\forall x > 0\ ,\ \ln\Big(\varphi_n(x)\Big)$ tend vers $S(x) - x\gamma - \ln x$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7.

On note $\pi_p = \displaystyle\prod_{n=1}^{p} \frac{\exp\left(\dfrac{x}{n}\right)}{1+\dfrac{x}{n}}$ (p entier naturel >0).

7.1. Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p\geq 1}$ vers une limite $L(x)$.

7.2. En déduire que : $\forall x > 0\ ,\ \varphi(x) = \dfrac{L(x)}{x}\exp(-x\gamma)$.

Partie 2.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$.

Question 1.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

1.2. Calculer $\Gamma(1)$.

1.3. Montrer que $\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Question 2.

Pour n entier naturel ≥ 1, on définit la fonction g_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$t \to \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t < n, \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

2.1. Prouver que : $\forall t \geq 0\ ,\ \exp(-t) \geq 1-t$.

En déduire que : $\forall t \geq 0\ ,\ \forall n \geq 1\ ,\ 0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t)$.

2.2. Montrer alors que :

$$\forall x > 0\ ,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

Question 3.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}dt.$$

3.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n.

3.2. Prouver que :

$$\forall x > 0\ ,\ \forall n \geq 1\ ,\ \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = n^x I_n(x).$$

3.3. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire que :

$$\forall x > 0 \ , \ \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Partie 3.

Dans toute cette partie, $x \in]0, 1[$.

Question 1.

Vérifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t \, dt$.

Question 2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit les fonctions :
v_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall t > 0 \ , \ v_n(t) = \dfrac{x^n}{n!} \exp(-t)(\ln t)^n$
et T_n de $]1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall u > 1 \ , \ T_n(u) = \displaystyle\int_{1/u}^{u} v_n(t) dt$.

2.1. Pour $u > 1$ donné, montrer que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement sur $\left[\dfrac{1}{u}, u\right]$.

2.2. Justifier que : $\forall u > 1 \ , \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^{u} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) \right) dt$.

Question 3.

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 \exp(-t) |\ln t|^n dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{x^n}{n!} \int_1^{+\infty} \exp(-t)(\ln t)^n dt.$$

3.1. Montrer que :

$$\forall p \geq 0 \ , \ \sum_{n=0}^{p} (a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t + x|\ln t|) dt.$$

3.2. En déduire que la série de fonctions de terme général T_n converge normalement sur $]1, +\infty[$.

Question 4.

4.1. Vérifier que $\forall x \in]0, 1[\ , \ \Gamma(1+x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t)(\ln t)^n \right) dt$.

4.2. Prouver alors que :

$$\forall x \in]0, 1[\ , \ \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t)(\ln t)^n dt \right).$$

Question 5.

5.1. A l'aide des parties 1 et 2, vérifier que :

$$\frac{\dfrac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

puis que $\dfrac{\dfrac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right)$.

5.2. En admettant que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations, prouver que :

$$\forall x \in]0,1[\ , \ \Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k}\zeta(k)\right).$$

5.3. Démontrer alors le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\ln^2 t\,dt = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$.