F23O

CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Aucune calculatrice n'est autorisée.

Exercice 1

E est un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ quelconque .
Soit (Γ) l'arc paramétré défini par :

$$x(t)=\frac{t}{1+t^4} \ , \ y(t)=\frac{t^3}{1+t^4} \ , \ z(t)=\frac{t^2}{1+t^4} \ , \ t\in\mathrm{R}.$$

Pour tout réel λ on considère le plan (P_λ) d'équation : $z=\lambda$.
1° Discuter suivant λ le nombre de points d'intersection de (Γ)et de (P_λ).
On note J l'ensemble des réels λ pour lesquels (Γ) et (P_λ) se coupent en quatre points.
2° Soit λ un élément de J.

a) Démontrer que les quatre points d'intersection de (Γ) et de (P_λ) sont les sommets d'un parallélogramme noté *ABCD*.
b) Vérifier que les directions des côtés de ce parallélogramme *ABCD* sont indépendantes de λ.
c) Prouver que *ABCD* est un rectangle si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même norme.

3° On suppose que le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormé.
Calculer en fonction de λ l'aire du rectangle *ABCD*.

Exercice 2

R désigne l'ensemble des nombres réels.

Soit α un réel strictement positif.

Pour n entier naturel non nul, on considère l'application u_n de $[0,+\infty[$ vers $\boldsymbol{R}$ définie par :

$$u_n(x)=\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}.$$

Tournez la page S.V.P.

1° Etude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

b) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.
Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

d) On suppose dans cette question que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour x élément de $[0,+\infty[$, on pose :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

i) Etablir l'inégalité : $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+k\,x^2)}$.

ii) En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,a]$ où a est un réel strictement positif.

On note S l'application de $[0,+\infty[$ vers $\boldsymbol{R}$ définie par : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2° Etude de la continuité de S.

a) Montrer que, pour tout α, S est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors S est continue sur $[0,+\infty[$.

c) On suppose que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

i) Soit f l'application définie sur $[1,+\infty[$ par : $t \mapsto f(t) = \frac{x}{t^{\alpha}(1+t\,x^2)}$. Prouver que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

ii) Montrer que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq S(x)$.

iii) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}\,(1+t\,x^2)}dt$.

iv) En déduire que S n'est pas continue en 0.

Exercice 3

$\boldsymbol{R}$ est le corps des nombres réels, C celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note E le C-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans C. I est la matrice identité de E. Pour A élément de E, a_{ij} est le coefficient de A situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne. On note F le C-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans C.

Pour $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de F, on pose $\| X \| = \sup\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$; on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur F. On note $KerA$ l'ensemble des éléments X de F vérifiant $AX = 0$.

Une matrice $A = (a_{ij})$ à coefficients réels est dite stochastique si:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \\ \forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2, 0 \leq a_{ij} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des matrices stochastiques de E.
Dans tout l'exercice A est un élément de S, $A \neq I$.

<u>Première partie</u>

1° Soit B un élément de S. Prouver que AB appartient à S.

2° Montrer que pour tout k entier naturel, A^k appartient à S.

3° Soit X un élément de F. Démontrer que $\| AX \| \leq \| X \|$. En déduire pour tout k entier naturel, $\| A^k X \| \leq \| X \|$.

4° Montrer que 1 est valeur propre de A.

5° Soit λ une valeur propre complexe de A, montrer que : $|\lambda| \leq 1$.

6° Soit λ une valeur propre complexe de A, telle que $|\lambda| = 1$.

a) Soit X un élément de $Ker(A - \lambda I)^2$. On pose : $Y = (A - \lambda I)X$.

i) Etablir que, pour tout k entier naturel, $k \geq 2$, $A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} Y$.

ii) En déduire que $Y = 0$ (on pourra utiliser l'inégalité établie à la question 3° de la première partie).

iii) Prouver que $Ker(A - \lambda I)^2 = Ker(A - \lambda I)$.

b) En déduire que, pour tout k entier naturel, $k \geq 2$, on a :

$$Ker(A - \lambda I)^k = Ker(A - \lambda I).$$

<u>Deuxième partie</u>

On suppose que A admet $r+1$ valeurs propres complexes deux à deux distinctes, on les note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$, avec $\lambda_0 = 1$.

Dans toute cette partie p désigne un entier naturel non nul.

Pour X élément de F, on pose : $X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p} A^k X$. On veut étudier la convergence, quand p tend vers $+\infty$, de la suite (X_p) dans F.

1° Soit λ une valeur propre complexe de A , $\lambda \neq 1$.

a) Prouver que : $\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\right) = 0$.

b) On suppose que X est un élément de $Ker(A-\lambda I)$. Montrer que la suite (X_p) converge vers 0.

2° On suppose, dans cette question, que A est diagonalisable.

Soit X un élément quelconque de F. Démontrer que la suite (X_p) converge vers un élément de $Ker(A-I)$.

3° On s'intéresse dans cette question à une valeur propre complexe λ de A vérifiant : $|\lambda| < 1$.

Soit X un élément de $Ker(A-\lambda I)^q$, où q est un entier naturel, $q \geq 2$.

a) Soit k un entier naturel, $k \geq q$. Montrer que :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j \quad \text{et que} \quad A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X .$$

On rappelle que $C_k^j = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}$.

b) Prouver que, pour tout j élément de $\{0,1,\ldots,q-1\}$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} C_k^j \lambda^{k-j} = 0 .$$

c) Démontrer que la suite (X_p) converge vers 0.

4° On suppose que le polynôme caractéristique de A, noté $P_A(T)$, est égal à :

$P_A(T) = (-1)^n \prod_{j=0}^{s}(T-\lambda_j)^{k_j} \prod_{j=s+1}^{r}(T-\lambda_j)^{q_j}$ où $s, k_0,\ldots,k_s, q_{s+1},\ldots,q_r$ sont des entiers naturels non nuls avec $s < r$ et où $|\lambda_j| = 1$ si et seulement si $j \leq s$.

a) Prouver que F est égal à la somme directe de sous espaces vectoriels suivante :

$$F = Ker(A-\lambda_0 I) \oplus .. \oplus Ker(A-\lambda_s I) \oplus Ker(A-\lambda_{s+1} I)^{q_{s+1}} \oplus .. \oplus Ker(A-\lambda_r I)^{q_r} .$$

b) Soit X un élément quelconque de F. Etudier la convergence de la suite (X_p).