

Problème I : Réaction chimique et création d'entropie**1. Préliminaires**

1.a. Le bilan entropique de la réaction s'exprime :

$$\Delta S = S_{\text{ech}} + S_{\text{cr}} \text{ et } S_{\text{ech}} = \frac{Q}{T_0}. \text{ D'où } \boxed{S_{\text{cr}} = \Delta S - \frac{Q}{T_0}}$$

Le deuxième principe énonce $S_{\text{cr}} \geq 0$, si la variation d'entropie est évaluée entre des états se succédant dans le temps. C'est donc un principe d'évolution qui établit une distinction dans la succession temporelle des états thermodynamiques.

L'égalité a lieu pour une transformation réversible.

1.b. Pour une transformation monobare, le travail reçu par le système est : $W = -P_0 \Delta V$, donc la variation d'énergie interne est $\Delta U = Q - P_0 \Delta V$. On a donc bien $\boxed{Q = \Delta(U + P_0 V) = \Delta H}$, car les pressions initiales et finales du système sont celles de la source de pression

1.c. Le système est en équilibre avec le thermostat au début et à la fin de la transformation, donc

$$\Delta G = \Delta H - T_0 \Delta S = T_0 \left(\frac{Q}{T_0} - \Delta S \right), \text{ donc } \boxed{\Delta G = -T_0 S_{\text{cr}}}.$$

On a toujours $\boxed{\Delta G \leq 0}$ (avec égalité dans le cas réversible)

2. Formation de HCl

2.a. Par définition : $\boxed{K = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta_r H^0 - T \Delta_r S_0}{RT}\right)}$

Numériquement : $\boxed{K = 3,1 \cdot 10^{33}}$.

La constante d'équilibre est très élevée, on peut donc s'attendre à des équilibres très déplacés vers les produits : la réaction est bien quasi-totale.

2.b. La réaction étant totale, on a $\boxed{\Delta H = \Delta_r H^0 = -185 \text{ kJ}}$

La réaction est **exothermique**

2.c. Le potentiel chimique d'un gaz parfait dans un mélange idéal est : $\boxed{\mu_i = \mu_i^0(T) + RT \ln\left(x_i \frac{P}{P^0}\right)}$

2.d. On a $\Delta G = 2 \cdot \mu_{\text{HCl}} - \mu_{\text{H}_2} - \mu_{\text{Cl}_2}$

avec $\mu_{\text{HCl}} = \mu_{\text{HCl}}^0(T)$ (car $P = P_0 = P^0 = 1 \text{ bar}$), $\mu_{\text{H}_2} = \mu_{\text{H}_2}^0(T) + RT \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et

$\mu_{\text{Cl}_2} = \mu_{\text{Cl}_2}^0(T) + RT \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ (dans l'état initial , les gaz H_2 et Cl_2 sont mélangés).

Par ailleurs $\Delta_r G^0 = 2\mu_{\text{HCl}}^0 - \mu_{\text{H}_2}^0 - \mu_{\text{Cl}_2}^0$. Il vient donc $\boxed{\Delta G = \Delta_r G_0 + 2RT_0 \ln(2)}$

On en déduit $S_{cr} = -\frac{\Delta G}{T_0} = \frac{-\Delta_r G^0}{T_0} - 2R \ln(2) = -\frac{\Delta_r H^0}{T_0} + \Delta_r S^0 - 2R \ln(2)$. Numériquement :

$$S_{cr} = 630 \text{ J.K}^{-1}.$$

Par ailleurs $\Delta S = S_{cr} + \frac{Q}{T_0} = S_{cr} + \frac{\Delta H}{T_0}$, soit, numériquement : $\Delta S = 8,5 \text{ J.K}^{-1}$

On remarque que $\Delta S \ll S_{cr}$: la création d'entropie se fait essentiellement à l'extérieur du système.

La cause principale de création d'entropie est ici le **transfert thermique irréversible qui se produit entre le système et la source de température**.

3. Dissociation de $\text{N}_2\text{O}_{4(g)}$

3.a. Par application des règles de Hess :

$$\Delta_r H^0 = 2 \times 33,2 - 9,16 = 57,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$\Delta_r S^0 = 2 \times 240 - 304 = 1,8 \cdot 10^2 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

L'entropie molaire standard de réaction de la réaction (2) est beaucoup plus grande que dans le cas de la réaction (1) : dans la réaction (2), il y a augmentation de la quantité de gaz (*le nombre de moles gazeuses augmente*), alors que cette quantité reste constante dans la réaction (1).

La constante d'équilibre de la réaction est $K' = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT_0}\right) = 0,14$

3.b. On réalise un tableau de quantité de matière

	$\text{N}_2\text{O}_{4(g)}$	$\text{NO}_{2(g)}$
Initial	1	0
Final	$1-\xi$	2ξ

On a donc $K' = \left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right)^2 / \left(\frac{1-\xi}{1-\xi^2}\right) = \frac{4\xi^2}{(1-\xi^2)}$. Il vient : $\xi^2 = \frac{K'}{4+K'}$ et donc $\xi = 0,19$

On a donc à l'équilibre : 0,37 mol de NO_2 et 0,81 mol de N_2O_4 .

3.c. On a simplement $\Delta H = \xi \cdot \Delta_r H^0$ (pas de terme de mélange dans les enthalpies molaires partielles).

Numériquement $\Delta H = 11 \text{ kJ}$. La réaction est, cette fois-ci, **endothermique**.

3.d. On a maintenant $\Delta S = S_{cr} + \frac{Q}{T_0} = S_{cr} + \frac{\Delta H}{T_0} = 40 \text{ J.K}^{-1}$

Clairement : $\Delta S \gg S_{cr}$.

La source principale de création d'entropie est l'**augmentation d'entropie propre du système** : son désordre augmente par augmentation de la quantité de gaz.

La situation est différente de celle rencontrée pour la réaction (1) pour laquelle les transferts thermiques jouent un rôle dominant dans la création d'entropie.

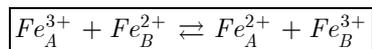
4. Etude d'une pile de concentration

4.a. La relation de Nernst donne, à l'instant initial :

$$V_A - V_B = 0,059 \cdot \log_{10} \left(\frac{[Fe^{3+}]_A [Fe^{2+}]_B}{[Fe^{2+}]_A [Fe^{3+}]_B} \right) = 0,059 \times \log_{10} \left(\frac{0,2^2}{0,1^2} \right) = 36 \text{ mV}$$

On a $V_A - V_B > 0$: les électrons circulent donc de **B vers A**

4.b. L'équation bilan est simplement :



Les grandeurs molaires standard de réaction sont toutes nulles.

La constante d'équilibre de la réaction vaut donc évidemment : 1. $K^n = 1$

4.c. A l'équilibre, l'avancement ξ de réaction est tel que $\frac{(0,1 + \xi)^2}{(0,2 - \xi)^2} = 1$, soit $\xi = 0,05$. Donc, à l'équilibre,

toutes les concentrations sont égales :

$$[Fe_A^{2+}] = [Fe_A^{3+}] = [Fe_B^{2+}] = [Fe_B^{3+}] = 0,15 \text{ mol.L}^{-1}$$

4.d. En solution idéale : $\mu_i = \mu_i^0(T) + RT \ln \left(\frac{c_i}{c^0} \right)$

4.e. On a maintenant (tous les termes chimiques s'annulent évidemment) :

$$\Delta G = RT \times 50.10^{-3} \times (4 \times 0,15 \times \ln(0,15) - 2 \times 0,2 \times \ln(0,2) - 2 \times 0,1 \times \ln(0,1)) \text{ et donc } \Delta G = -4,2 \text{ J}$$

L'entropie créée est $S_{cr} = -\frac{\Delta G}{T_0} = 1,4.10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$

Par ailleurs $Q = \Delta H = 0$, donc $\Delta S = S_{cr} = 1,4.10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$

Le phénomène lié à la création d'entropie est purement un effet de **concentration** (donc en définitive de **mélange**). Il n'y a pas de changement de la quantité de matière totale, comme pour la dissociation de N_2O_4 ni de transfert thermique avec le thermostat, comme dans le cas de la formation de HCl .

Ce résultat ne dépend pas des propriétés chimiques spécifiques du couple : seuls les termes de mélange interviennent (dans le modèle des solutions idéales)

Problème II : Un modèle de l'indice de réfraction

Partie I : Champs électromagnétiques créés par une nappe plane de courant

I.1. Champ statique.

I.1.a. Pour un point M quelconque, le plan Mxz est un plan de symétrie : le champ \vec{B} est donc perpendiculaire à ce plan et $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_y$.

Par ailleurs, le système est **invariant par translation parallèle à Ox et Oy** : le champ \vec{B} ne dépend que de z . Le plan $z = 0$ est également un plan de symétrie : sur ce plan le champ \vec{B} doit donc être parallèle à \vec{e}_z .

Comme il doit aussi être parallèle à \vec{e}_y , il est nul : $\vec{B}(z = 0) = \vec{0}$

I.1.b. On écrit l'équation de Maxwell-Ampère en régime permanent ; $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$.

- Pour $|z| < a/2$, il vient $-\frac{dB}{dz} = \mu_0 J_0$, soit $B = -\mu_0 J_0 z + K$. Or $B(0) = 0$, donc $\vec{B} = -\mu_0 J_0 z \vec{e}_y$
- Pour $|z| > \frac{a}{2}$, $\frac{dB}{dz} = 0$: le champ est uniforme

I.1.c. Il n'y a pas de densité surfacique de courant sur les plans, donc le champ \vec{B} est continu au passage par les interfaces $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$.

On a donc, $B\left(z = \frac{a^+}{2}\right) = B\left(-\frac{a^-}{2}\right) = -\mu_0 J_0 \frac{a}{2}$. Donc

- pour $z > \frac{a}{2}$: $\vec{B} = -\mu_0 J_0 \frac{a}{2} \vec{e}_y$
- pour $z < -\frac{a}{2}$: $\vec{B} = \mu_0 J_0 \frac{a}{2} \vec{e}_y$

I.1.d.

Il suffit d'appliquer les conditions précédentes avec $a \rightarrow 0$ et $J_s = J_0 a$. On obtient :

- pour $z > 0$: $\vec{B} = -\mu_0 \frac{J_s}{2} \vec{e}_y$
- pour $z < 0$: $\vec{B} = \mu_0 \frac{J_s}{2} \vec{e}_y$

Dans le cas général, la relation de passage est $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$, avec ici :

$\vec{B}_2 = \vec{B}(z = 0^+)$, $\vec{B}_1 = \vec{B}(z = 0^-)$, $\vec{n}_{12} = \vec{e}_z$ et $\vec{J}_s = J_s \vec{e}_x$.

On a bien $\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = -\mu_0 J_s \vec{e}_y = \mu_0 J_s \vec{e}_x \times \vec{e}_z$, ce qui est conforme au résultat général.

I.2. Champ créé par une nappe de courant harmonique.

I.2.a.

- L'approximation des régimes quasi stationnaires consiste à négliger tous les retards de propagation, ce qui revient à ne pas tenir compte du courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère.

- L'ARQS est vérifiée lorsque les retards de propagation sont très petits devant le temps caractéristique d'évolution des champs, par exemple la période T : $\frac{D}{c} \ll T$
- La nappe a une dimension infinie : le critère d'ARQS ne peut donc pas être vérifié en tout point : l'ARQS est insuffisante

I.2.b. Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ; \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \text{div} \vec{B} = 0 ; \quad \text{div} \vec{E} = 0$$

On calcule $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$.

De plus $\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$ car $\text{div} \vec{B} = \vec{0}$. On a donc finalement

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

I.2.c. On reporte simplement dans l'équation de propagation pour obtenir : $\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$

La solution générale est de la forme $f = A \exp\left[i\frac{\omega}{c}z\right] + B \exp\left[-i\frac{\omega}{c}z\right]$

Si on considère qu'il n'y a pas de source à l'infini, les ondes doivent s'éloigner du plan. Ceci correspond à une OPPH dans le sens des z croissants pour $z > 0$ et une OPPH dans le sens des z décroissants pour $z < 0$.

Les expressions respectives des champs sont donc :

$$\vec{B}(z, t) = A \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_y \quad \text{pour } z > 0 \quad \text{et}$$

$$\vec{B}(z, t) = A' \exp\left[i\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_y \quad \text{pour } z < 0.$$

On a de part et d'autre des ondes planes progressives, pour lesquelles la relation de structure d'onde plane est valide :

- pour $z > 0$, $\vec{E} = \vec{B} \times c \vec{e}_z$, donc $\vec{E}(z, t) = c A \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x$
- pour $z < 0$, $\vec{E} = \vec{B} \times (-c \vec{e}_z)$, donc $\vec{E}(z, t) = -c A' \exp\left[i\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x$

I.2.d. On sait que la composante tangentielle du champ électrique est continue au passage par $z = 0$, par conséquent : $A = -A'$

Par ailleurs, $\vec{B}(z = 0^+, t) - \vec{B}(z = 0^-, t) = \mu_0 J_S(t) \vec{e}_x \times \vec{e}_z$. On en déduit :

$$A - A' = -\mu_0 J_{S0} \quad \text{et donc} \quad A = -\frac{\mu_0 J_{S0}}{2} = -A'$$

On retrouve bien les expressions (1) et (1') de l'énoncé.

Partie II : Interaction d'une onde avec un plan d'atomes

II.1. Mouvement de la charge élastiquement liée en régime forcé

II.1.a. La force de Lorentz s'exerçant sur la charge $-q$ est de la forme $\vec{f} = -q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. En ordre de grandeur : $B \sim \frac{E}{c}$. Le rapport des ordres de grandeur de la force magnétique à la force électrique est donc de l'ordre de $\frac{v}{c}$. Pour un électron non relativiste : $\frac{v}{c} \ll 1$: **la force magnétique peut être négligée.**

Le champ en O peut être confondu avec le champ en M si $\|\vec{r}\| \ll \lambda$, c'est à dire si la longueur d'onde du rayonnement est grande devant les dimensions de l'atome dans lequel se déplace l'électron.

II.1.b. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la charge mobile donne :

$$-m\omega^2 \vec{r} = -q\vec{E}_0 - m\omega_0^2 \vec{r}, \text{ d'où } \boxed{r_0 = -\frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}}$$

II.2. Densité de courant surfacique induite

II.2.a. La densité de courant surfacique induite est $\vec{J}_S = N_S(-q)\vec{v} = N_S(-q)i\omega\vec{r} = N_S \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} i\omega \vec{E}_0$

donc $\boxed{\alpha_0 = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}}$

II.2.b. Sur le plan de charges, le champ électrique créé par la distribution de charges elle-même est :

$$\vec{E}_{dist} = -\frac{\mu_0 c J_{S0}}{2} \exp[i\omega t] \vec{e}_x = -\frac{\mu_0 c}{2} \vec{J}_S$$

on a donc $\vec{J}_S = N_S \alpha_0 i\omega \left(\vec{E}_{0i} - \mu_0 \frac{c}{2} \vec{J}_S \right)$, et $\vec{J}_S = \frac{N_S \alpha_0 i\omega}{1 + \frac{N_S \alpha_0 \mu_0 c}{2} i\omega} \vec{E}_i(z=0, t)$ et donc $\boxed{\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{N_S \alpha_0 \mu_0 c}{2} i\omega}}$

II.3. Champ électromagnétique

II.3.a. Le champ électrique créé par la distribution du côté $z > 0$ est :

$$\vec{E}^{dist}(z, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} J_{S0} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x = -\frac{\mu_0 c}{2} N_S \alpha i\omega \vec{E}_{0i} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

donc

$$\vec{E}^{dist}(z, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} N_S \alpha i\omega \vec{E}_i(z, t)$$

Le champ résultant est donc $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_i - \frac{\mu_0 c}{2} N_S \alpha i\omega \vec{E}_i = (1 - i\omega\gamma) \vec{E}_i$, avec $\boxed{\gamma = \frac{N_S \alpha \mu_0 c}{2}}$

II.3.b. L'onde se propageant dans le sens des $z < 0$ est uniquement due à la distribution :

$$\vec{E}^-(z, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} N_S \alpha i\omega E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{E}^-(z, t) = -i\omega\gamma E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x$$

Partie III : Modèle de propagation dans le milieu

III.1. Interprétation qualitative de l'influence des plans sur la propagation

III.1.a. A chaque passage par un plan, le champ incident est multiplié par $1 - i\omega\gamma = \exp[-i\omega\gamma]$

Entre les plans $z_\ell = \ell a$ et $z_{\ell+1} = (\ell + 1)a$, l'onde a subi $\ell + 1$ traversées de plan, donc

$$\vec{E}(z, t) = E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \exp(-(\ell + 1)i\omega\gamma), \text{ qui donne bien :}$$

$$\vec{E}(z, t) = E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t - \left\{\frac{z}{c} + (\ell + 1)\gamma\right\}\right)\right] \vec{e}_x.$$

III.1.b.

Si la longueur d'onde est grande devant a , on peut confondre z et $(\ell + 1)a$ dans l'expression du champ :

$$\vec{E}(z, t) = E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t - \left\{\frac{z}{c} + \frac{z}{a}\gamma\right\}\right)\right] \vec{e}_x$$

et donc

$$\vec{E}(z, t) = E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\left\{1 + \frac{\gamma c}{a}\right\}\right)\right] \vec{e}_x, \text{ qui s'écrit bien :}$$

$$\vec{E}(z, t) = E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}n\right)\right] \vec{e}_x, \text{ avec } \boxed{n = 1 + \frac{\gamma c}{a}}$$

III.1.c. Le champ de l'onde peut s'écrire :

$$\vec{E}(z, t) = E_{0i} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{v_\varphi}\right)\right] \vec{e}_x, \text{ et correspond à une onde se propageant à la vitesse (de phase)}$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{n}}, \text{ ce qui correspond à la définition de l'indice de réfraction en optique.}$$

Exemples d'expérience : mesure de l'indice du verre par étude du minimum de déviation d'un prisme.

Plus élémentaire : mesure de la relation $\sin r = n \sin i$

III.2. Utilisation du modèle : indice de réfraction de l'air

$$\text{III.2.a. } N_V = \frac{P}{RT} N_A = 2,52 \cdot 10^{25} \text{ molécules/m}^3$$

Si d est la distance moyenne entre molécules, une molécule occupe un volume $d^3 = \frac{1}{N_v}$, donc la distance

moyenne entre molécules est, en ordre de grandeur: $d = N_v^{-1/3} = 3,41 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

III.2.b. Si, dans le modèle le plus simple, les atomes occupaient un réseau cubique simple de pas d , la distance entre plans serait bien $a = d$ et, sur un plan, une molécule occuperait un carré de côté d^2 , donc

$$N_s = \frac{1}{d^2}.$$

Il est raisonnable d'utiliser ces relations dans le cas réel, en considérant que d est la distance moyenne entre molécules examinée ci-dessus.

Dans le domaine visible $\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$. On a bien $\lambda \gg d \sim a$

III.2.c. La relation $n = 1 + \frac{\gamma c}{a}$ donne, en exprimant $\gamma = \frac{N_s \alpha_0 \mu_0 c}{2} = \frac{N_s \mu_0 c}{2} \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

$$\text{donc } n = 1 + \frac{\gamma c}{a} = 1 + \frac{N_s \mu_0 c^2}{a^2} \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\text{or } N_v = \frac{N_s}{a}, \text{ donc } n = 1 + \frac{N_v \mu_0 c^2}{2} \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Dans l'hypothèse où $\omega \ll \omega_0$, on peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{\omega}{\omega_0}$:

$$n = 1 + \frac{N_v \mu_0 c^2}{2} \frac{q^2}{m \omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \text{ que l'on peut exprimer en fonction de } \lambda = \frac{2\pi}{\omega} c :$$

$$n = 1 + \frac{N_v \mu_0 c^2}{2} \frac{q^2}{m \omega_0^2} + \frac{N_v \mu_0 c^2}{2} \frac{q^2}{m \omega_0^4} \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \text{ qui est de la forme demandée avec}$$

$$A = \frac{N_v \mu_0 c^2}{2} \frac{q^2}{m \omega_0^2} \text{ et } B = \frac{N_v \mu_0 2\pi^2 c^4 q^2}{m \omega_0^4}$$

III.2.d. Le rapport $\frac{B}{A} = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2}$, donc $\omega_0 = 2\pi c \sqrt{\frac{A}{B}}$.

Expérimentalement : $\frac{B}{A} = \frac{1,5 \cdot 10^{-18}}{2,72 \cdot 10^{-4}} = 5,515 \cdot 10^{-15}$ et $\omega_0 = 2,54 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$

Pour $\lambda = 0,510^{-6} \mu\text{m}$, on a $\omega = 3,77 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$. On a donc $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{6,7}$. L'approximation est correcte (le terme intervient par son carré) mais commence à devenir discutable dans l'ultraviolet

III.2.e. On applique $A = \frac{N_v \mu_0 c^2}{2} \frac{q^2}{m \omega_0^2}$ et on trouve $A = 6,2 \cdot 10^{-5}$.

La valeur est 4 fois plus faible que la valeur expérimentale : le modèle prédit simplement un ordre de grandeur correct.

Il serait naïf d'attendre mieux d'un modèle aussi simple.

III.3. Amélioration du modèle

III.3.a. Sur le plan $z = \ell a$, il existe une densité surfacique de courant :

$$\vec{J}_{S\ell} = N_s \alpha_0 i \omega \vec{E}_t(z = \ell a, t)$$

Les expressions du **I.2.d.** des champs électriques se rapportent au champ émis par un plan en $z = 0$. Elles peuvent être appliquées au champ émis par le plan en $z = \ell a$ en remplaçant z par $z - \ell a$ et J_{S0} par

$$J_{S\ell} = N_s \alpha_0 i \omega \underline{E}_t(z = \ell a, 0) :$$

$$\vec{E}(z, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} N_s \alpha_0 i \omega \underline{E}_t(z = \ell a, 0) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{(z - \ell a)}{c}\right)\right] \vec{e}_x \text{ pour } z > \ell a$$

$$\vec{E}(z, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} N_s \alpha_0 i \omega \underline{E}_t(z = \ell a, 0) \exp\left[i\omega\left(t + \frac{(z - \ell a)}{c}\right)\right] \vec{e}_x \text{ pour } z < \ell a.$$

En regroupant les exponentielles $\exp(i\omega t)$ de façon à faire apparaître $\underline{E}_t(z = \ell a, t)$, il vient :

$$\vec{E}(z, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} N_s \alpha_0 i \omega \underline{E}_t(z = \ell a, t) \exp\left[-i\omega \frac{(z - \ell a)}{c}\right] \vec{e}_x \text{ pour } z > \ell a$$

$$\vec{E}(z, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} N_s \alpha_0 i \omega \underline{E}_t(z = \ell a, t) \exp\left[i\omega \frac{(z - \ell a)}{c}\right] \vec{e}_x \text{ pour } z < \ell a.$$

III.3.b. En un point de cote z , le champ est la somme des champs :

- incident : $E_{oi} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x$

- dus aux plans de cote inférieure à z :

$$\sum_0^{\ell_0} -\frac{\mu_0 c}{2} N_s \alpha_0 i \omega \underline{E}_t(\ell a, t) \exp\left[-i\omega \frac{(z - \ell a)}{c}\right]$$

- dus aux plans de cote supérieure à z :

$$\sum_{\ell_0}^{\infty} -\frac{\mu_0 c}{2} N_s \alpha_0 i \omega \underline{E}_t(\ell a, t) \exp\left[i\omega \frac{(z - \ell a)}{c}\right]$$

La somme de tous ces champs est de la forme demandée, avec $\gamma_0 = N_S \alpha_0 \frac{\mu_0 c}{2}$.

III.3.c.

- Pour que la relation soit valable quel que soit ℓ_0 , le terme exponentiel doit nécessairement être constant. Ceci est possible si $n = 1$, mais dans ce cas la relation ne peut s'appliquer.
- Le coefficient qui précède le terme exponentiel doit donc être nul.

$$1 + \frac{c\gamma_0}{a} \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right) = 0$$

Ce qui permet d'exprimer n : $n^2 = 1 + \frac{2\gamma_0 c}{a}$

- Il reste maintenant $E_{0i} + E_{0t} \frac{c\gamma_0}{(1-n)a} = 0$, or $\frac{c\gamma_0}{a} = \frac{n^2 - 1}{2}$ et donc finalement :

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{(n-1)2}{(n^2-1)} = \frac{2}{n+1}$$

III.3.d. Il suffit d'écrire la continuité du champ en $z = 0$ (composante tangentielle) :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

donc

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} - 1 = \frac{2}{n+1} - 1 = \frac{1-n}{1+n}$$

On retrouve les résultats classiques.