

Épreuve de Physique PSI

Étude d'une ligne bifilaire

Première partie

A1. Dans le vide, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \operatorname{div} \vec{B} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Le conducteur est supposé parfait (conductivité infinie) donc $\rho = 0$. La répartition des charges est seulement sur la surface du conducteur.

A2. Notons M le point où l'on calcule le champ.

La distribution de charges est invariante par :

- symétrie par rapport au plan passant par l'axe du cylindre et le point M et par rapport au plan passant par M perpendiculaire à cet axe (car le cylindre est de longueur infinie). Le champ en M est donc dans l'intersection de ces plans. Dans la base cylindrique indiquée, il est porté par le vecteur unitaire $\vec{u}_r(M)$ soit $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r(M)$.

- invariance par translation le long de Oz et par rotation d'un angle θ quelconque donc $E(r, \theta, z)$ ne dépend pas de z et de θ .

Il reste donc $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r(M)$. Les lignes de champ sont radiales.

A3. On peut utiliser le théorème de Gauss pour une surface de contrôle Σ cylindrique, de centre O , de rayon r et de longueur l . Il s'écrit $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{INT}}(\Sigma)}{\epsilon_0}$ avec par définition

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}_\Sigma dS = E(r) \oiint_\Sigma dS = E(r) 2\pi r l \text{ et } Q_{\text{INT}}(\Sigma) = \iiint_{V(\Sigma)} \rho d\tau \text{ (où } \rho \text{ est uniforme).}$$

- pour $r < a$: $Q_{\text{INT}}(\Sigma) = 0$. donc il vient $E(r) = 0$.

- pour $r \geq a$: $Q_{\text{INT}}(\Sigma) = \lambda l$. donc il vient $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

Le champ et le potentiel électrostatique sont liés par $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$.

A4. On a $V(r) - V_1 = \int_a^r dV = \int_a^r \vec{\text{grad}} V \cdot \vec{\tau} dl = \int_a^r -E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dr = -\int_a^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$. Il vient

$$V(r) - V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

A5. Comme $h \gg a$, la distance entre un point du fil 1 et un point du fil 2 situés dans un plan perpendiculaire aux deux fils est pratiquement égal à h .

On a $(V_2 - V_1)_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{h}{a}\right)$ pour le cylindre 1 seul et $(V_1 - V_2)_2 = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{h}{a}\right)$ pour le cylindre 2 seul.

D'après le théorème de superposition, $(V_1 - V_2) = (V_1 - V_2)_1 + (V_1 - V_2)_2$ soit

$$(V_1 - V_2) = +\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{h}{a}\right).$$

A6. L'allure des ligne de champ (en traits pointillés) et des lignes équipotentielles (en traits pleins) est la suivante :

A7. On peut écrire

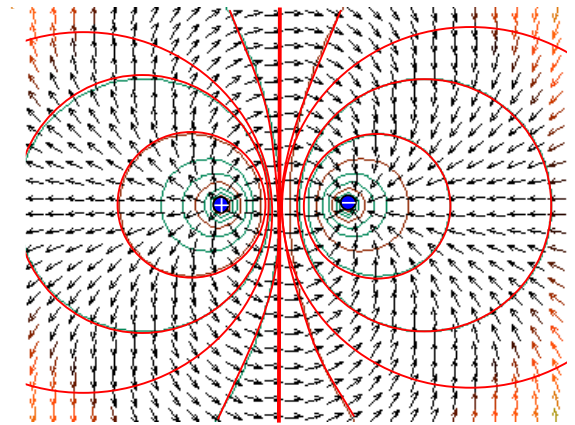
$$V_1(M) = V_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{a}\right) \text{ en un point } M \text{ situé à}$$

$$r_1 \text{ du fil 1 seul et } V_2(M) = V_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{a}\right) \text{ au}$$

même point M situé à r_2 du fil 2 seul. En présence des deux fils, le potentiel total est

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) = V_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{a}\right) + V_2 +$$

$$= V_1 + V_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \text{ Les surfaces équi-}$$



tentielles sont telles que $V(M) = C$. Elles correspondent donc à $\frac{r_2}{r_1} = c$. En particulier, $c = 1$ correspond à $r_2 = r_1$: c'est le **plan médiateur** entre les deux fils.

A8. Le champ électrique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles donc en un point M du plan médiateur, de coordonnées $(x = \frac{h}{2}, y, z)$ [en prenant l'origine en O_1], le champ est porté par \vec{u}_x et a pour valeur algébrique

$$E(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_{r1} \cdot \vec{u}_x - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_{r2} \cdot \vec{u}_x = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 r} \cos(\theta).$$

Comme $\cos(\theta) = \frac{h}{2r}$ et $r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + y^2$, on peut écrire

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda h}{2\pi\epsilon_0 \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 + y^2\right)} \vec{u}_x.$$

La courbe $\|\vec{E}\|$ en fonction de y est tracée ci-contre.

A9. Par définition, une ligne de champ est tangente au champ électrique. Elle est une droite si \vec{u}_{r1} et \vec{u}_{r2} sont colinéaires. Cela correspond aux droites passant par les deux fils dans les plans perpendiculaires à ceux-ci. Elles sont dirigées par \vec{u}_x .

En un point d'abscisse x d'une telle droite, on a :

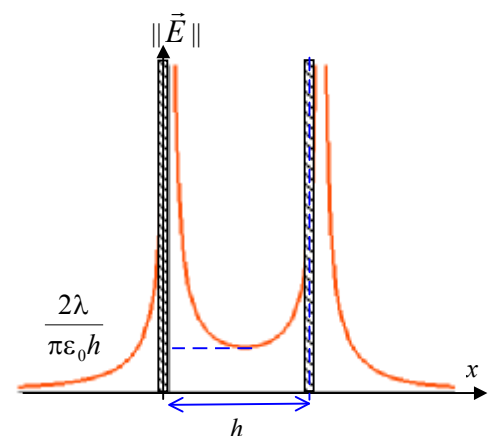
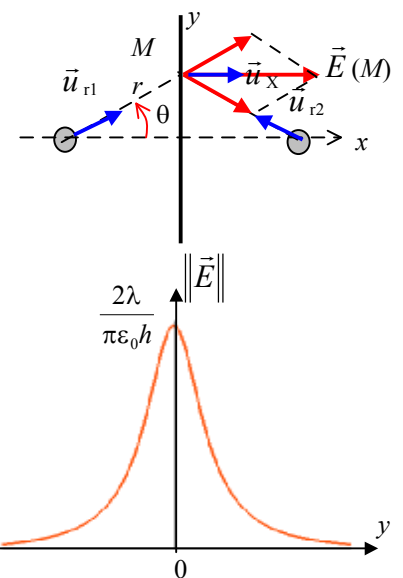
- si $x < -a$: $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(-x)}(-\vec{u}_x) + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(-x+h)}(-\vec{u}_x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x(h-x)} \vec{u}_x$;

- si $a < x < h-a$: $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{u}_x + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(h-x)}(-\vec{u}_x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x(h-x)} \vec{u}_x$;

- si $h-a < x$: $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{u}_x + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(x-h)} \vec{u}_x$
 $= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x(x-h)} \vec{u}_x$;

Dans tous les cas, on peut donc écrire

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x(h-x)} \vec{u}_x.$$



La courbe $\|\vec{E}\| = f(x)$ est tracée ci-contre :

B1. Notons M le point où l'on calcule le champ.

La distribution de courant est invariante par

- antisymétrie par rapport au plan passant par l'axe du cylindre et le point M . Le champ en M est donc dans perpendiculaire à ce plan. Dans la base cylindrique indiquée, il est porté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta(M)$ soit $\vec{B}_1(M) = B_1(r, \theta, z)\vec{u}_\theta(M)$.

- invariance par translation le long de Oz et par rotation d'un angle θ quelconque donc $B_1(r, \theta, z)$ ne dépend pas de z et de θ .

Il reste donc $\vec{B}_1(M) = B_1(r)\vec{u}_\theta(M)$. Les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe du fil.

B2. Sur le cercle passant par M (donc centré sur l'axe, de rayon r) orienté comme \vec{u}_θ , le théorème d'Ampère s'écrit $\oint_C \vec{B}(P) \cdot \vec{\tau}(P) dl = \mu_0 I_C$.

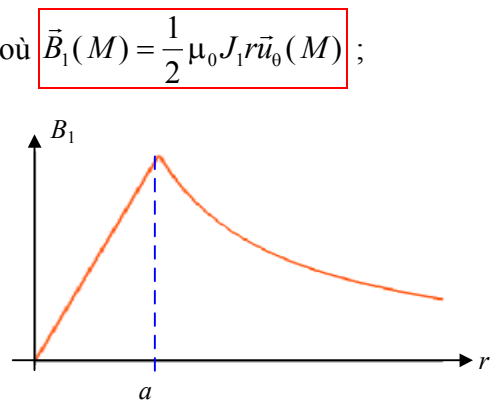
Or $\oint_C \vec{B}(P) \cdot \vec{\tau}(P) dl = \int_0^{2\pi} \vec{B}_1(r)\vec{u}_\theta(P) \cdot \vec{u}_\theta(P) r d\theta = 2\pi r B_1(r)$.

- si $r < a$: $I_C = \iint_{\Sigma(r)} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_\Sigma dS = J_1 \pi r^2$ avec l'orientation choisie d'où $\vec{B}_1(M) = \frac{1}{2} \mu_0 J_1 r \vec{u}_\theta(M)$;

- si $a < r$: $I_C = \iint_{\Sigma(a)} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_\Sigma dS = J_1 \pi a^2$ avec l'orientation choisie

d'où $\vec{B}_1(M) = \frac{1}{2} \mu_0 J_1 \frac{a^2}{r} \vec{u}_\theta(M)$;

Le graphe de $B_1(r)$ est tracé ci-contre.



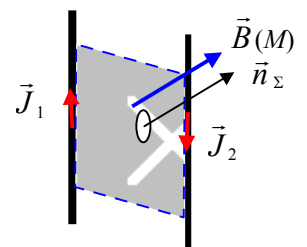
B3. En un point du plan défini par les axes des conducteurs d'abscisse x telle que $0 < x < h$, on a $\vec{u}_{01}(M) = \vec{u}_Y$ et $\vec{u}_{02}(M) = -\vec{u}_Y$ donc le champ total est

$$\vec{B}(M) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I_0}{\pi x} \vec{u}_Y + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{(-I_0)}{\pi} \frac{1}{h-x} (-\vec{u}_Y) \text{ soit}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I_0}{\pi} \frac{h}{x(h-x)} \vec{u}_Y.$$

Comme dans le calcul de \vec{E} ci-dessus, cette relation s'étend à tous les cas de position de M .

B4. $\Phi_0 = L_0 I_0$ est un flux magnétique par unité de longueur. Comme les fils sont parcourus par un courant d'intensité I_0 , et L_0 l'inductance par unité de longueur, Φ_0 est le flux du champ magnétique créée par les deux fils à travers un contour rectangulaire de longueur unité et s'appuyant sur les deux fils.



B5. Avec les expressions données, on obtient $L_0 C_0 = \mu_0 \epsilon_0$ soit

$$L_0 C_0 = \frac{1}{c^2}.$$

A.N. $L_0 C_0 = \frac{1}{9 \times 10^{16}} = 1,1 \times 10^{-17} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^2$.

Deuxième partie

C1. À un instant t fixé, on peut adapter l'étude faite ci-dessus.

Pour le seul fil d'axe $O_1 z$, la distribution de charges est invariante par

- symétrie par rapport au plan passant par l'axe du cylindre et le point M . Le champ en M est donc dans l'intersection de ces plans. Dans la base cylindrique indiquée, on a $\vec{E}_1(M) = E_{1r}(r_1, \theta, z)\vec{u}_{r1}(M) + E_{1z}(r_1, z, t)\vec{u}_z$.

!!! On admettra que $E_z(r, z, t) = 0$.

- invariance par rotation d'un angle θ quelconque donc $E_1(r_1, \theta, z)$ ne dépend pas de θ .

Il reste donc $\vec{E}_1(M, t) = E_1(r_1, z, t)\vec{u}_{r1}(M)$. Pour le deuxième fil, on obtiendrait de la même façon $\vec{E}_2(M, t) = E_2(r_2, z, t)\vec{u}_{r2}(M)$.

En un point du plan défini par les axes des conducteurs d'abscisse x telle que $0 < x < h$, on a $\vec{u}_{r1}(M) = \vec{u}_x$ et $\vec{u}_{r2}(M) = -\vec{u}_x$, $r_1 \approx x$ et $r_2 \approx h - x$ donc le champ total est de la forme $\vec{E} \approx E(x, z, t)\vec{u}_x$

Pour le même fil, la distribution de courant est invariante par

- antisymétrie par rapport au plan passant par l'axe du cylindre et le point M . Le champ en M est donc porté par le vecteur unitaire $\vec{u}_{\theta1}(M)$ soit $\vec{B}_1(M) = B_1(r_1, \theta, z)\vec{u}_{\theta1}(M)$.

- invariance par rotation d'un angle θ quelconque donc $B_1(r_1, \theta, z)$ ne dépend pas de θ .

Il reste donc $\vec{B}_1(M) = B_1(r_1, z, t)\vec{u}_{\theta1}(M)$. Les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe du fil. Sur une ligne de champ de rayon $r > a$ orienté comme \vec{u}_θ , le théorème de Stokes s'écrit

$\oint_{C_1} \vec{B}_1(P, t) \cdot \vec{\tau}(P) d\ell = \iint_{\Sigma(C_1)} \text{rot } \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_\Sigma dS = \iint_{\Sigma(C_1)} \left(\mu_0 \vec{J}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \right) \cdot \vec{n}_\Sigma dS$ avec $\vec{n}_\Sigma = \vec{u}_z$ soit $\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_\Sigma = 0$. On retrouve le théorème d'Ampère $\oint_{C_1} \vec{B}_1(P, t) \cdot \vec{\tau}(P) d\ell = \mu_0 i_{\Sigma(C_1)}(z, t)$ et on en déduit

$\vec{B}_1(M, t) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\pi} i_1(z, t) \frac{1}{r_1} \vec{u}_{\theta1}(M)$. Pour le deuxième fil, on obtiendrait de la même façon

$\vec{B}_2(M, t) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\pi} i_2(z, t) \frac{1}{r_2} \vec{u}_{\theta2}(M)$.

En un point du plan défini par les axes des conducteurs d'abscisse x telle que $0 < x < h$, on a $\vec{u}_{\theta1}(M) = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_{\theta2}(M) = -\vec{u}_y$, $r_1 \approx x$ et $r_2 \approx h - x$ donc le champ total est de la forme $\vec{B} \approx B(x, z, t)\vec{u}_y$

C2. Dans l'espace entre les conducteurs, la densité de courant est nulle et l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ soit, en projection sur \vec{u}_x dans la base cartésienne indiquée,

$$\frac{\partial B(x, z, t)}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E(x, z, t)}{\partial t} \quad [\mathcal{R1}]$$

C3. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit, en projection sur \vec{u}_y dans la base cartésienne indiquée,

$$\frac{\partial E(x, z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial B(x, z, t)}{\partial t} \quad [\mathcal{R2}]$$

C4. En un point du plan défini par les axes des conducteurs d'abscisse x telle que $0 < x < h$, on a $\vec{u}_{\theta1}(M) = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_{\theta2}(M) = -\vec{u}_y$ donc le champ total est $\vec{B}(M) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{i(z, t)}{\pi} \frac{1}{x} \vec{u}_y + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{(-i(z, t))}{\pi} \frac{1}{h-x} (-\vec{u}_y)$ soit $\vec{B}(M) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\pi} i(z, t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{h-x} \right) \vec{u}_y$.

On a bien l'expression proposée en posant $\alpha_B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\pi}$.

C5. En reportant cette expression de $B(x, z, t)$ dans les équations $[\mathcal{R1}]$ et $[\mathcal{R2}]$, on obtient

$\alpha_B \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} f(x) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E(x,z,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial E(x,z,t)}{\partial z} = -\alpha_B \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} f(x)$. On dérive la première par rapport à z et la deuxième par rapport à t et l'on obtient $\alpha_B \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} f(x) = -\frac{1}{c^2} \left(-\alpha_B \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} f(x) \right)$ soit $\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} = 0$.

On obtient bien une équation de d'Alembert avec la célérité c .

C6. On adapte l'expression obtenue en A9 soit $E(x,z,t) = \frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{h-x} \right)$. On retrouve la fonction $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{h-x} \right)$ qui intervient dans l'expression de $B(x,z,t)$.

C7. L'équation $[\mathcal{R}1]$ s'écrit alors $\alpha_B \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} f(x) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} f(x) \right)$ soit $\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \lambda(z,t)}{\partial t}$ ou encore $\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial \lambda(z,t)}{\partial t}$

On peut écrire cette relation $\pi a^2 \frac{\partial J_1(z,t)}{\partial z} = -\pi a^2 \frac{\partial \rho(z,t)}{\partial t}$ soit $\frac{\partial \rho(z,t)}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}_1) = 0$. On reconnaît l'équation locale décrivant la conservation de la charge électrique.

C8. On calcule la circulation de \vec{E} sur le segment de l'axe Ox entre les deux fils.

D'une part $C(\vec{E}) = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{\tau} dl = \int_1^2 \left(-\vec{\text{grad}} V \right) \cdot \vec{\tau} dl + \int_1^2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{\tau} dl = \int_1^2 -dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 A \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x dx = V_1 - V_2 = v(z,t)$.

D'autre part $C(\vec{E}) = \int_1^2 \frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} f(x) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x dx = \frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{h-x} \right) dx = \frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \ln\left(\frac{h-x_2}{h-x_1}\right) \right]$.

Comme $x_1 = a$ et $x_2 = h-a$, il reste $C(\vec{E}) = \frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{h-a}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{h-a}\right) \right] = \frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\pi\epsilon_0}{C_0} \right]$.

On en déduit $v(z,t) = \frac{\lambda(z,t)}{C_0}$.

C9. En reportant dans l'équation $[\mathcal{R}2]$, on obtient $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0} f(x) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\pi} i(z,t) f(x) \right)$ soit $\frac{\partial \lambda(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$ puis $C_0 \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$.

Comme on a montré $L_0 C_0 = \frac{1}{c^2}$, il vient $\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$. On retrouve l'équation obtenue à partir de la loi des mailles dans le modèle à constantes réparties de la ligne.

C10. L'équation $[\mathcal{R}_2]$ devient $\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$. On retrouve l'équation obtenue à partir de la loi des nœuds dans le modèle à constantes réparties de la ligne.

C11. On n'a pas négligé la densité de courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère puisqu'il n'y a pas de densité de courant de conduction dans l'espace étudié. Cependant, on a conservé les expressions de \vec{B} obtenues en régime statique, sans introduire de retard de propagation donc on est bien dans l'approximation des Régimes Quasi-Stationnaires.

D1. La loi des nœuds s'écrit $i(z, t) = i(z + dz, t) + C_0 dz \frac{\partial v(z + dz, t)}{\partial t} + G dz v(z + dz, t)$.

Après un développement de Taylor et en ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient $-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} dz = C_0 dz \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + G dz v(z, t)$ soit $-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = C_0 \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + G v(z, t)$.

La loi des mailles s'écrit $v(z, t) = v(z + dz, t) + L_0 dz \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + R dz i(z, t)$.

Après un développement de Taylor et en ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient $-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} dz = L_0 dz \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + R dz i(z, t)$ soit $-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = L_0 \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + R i(z, t)$.

D2. On dérive la première équation par rapport à t et la deuxième par rapport à z ; on obtient $-\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t \partial z} = C_0 \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} + G \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$ et $-\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = L_0 \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z \partial t} + R \frac{\partial i(z, t)}{\partial z}$. En reportant, on obtient $-\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = -L_0 \left[C_0 \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} + G \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \right] + R \left[C_0 \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + G v(z, t) \right]$ soit

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} = [L_0 G + R C_0] \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + R G v(z, t)$$

On dérive la première équation par rapport à z et la deuxième par rapport à t ; on obtient de même $\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} = [L_0 G + R C_0] \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + R G i(z, t)$.

D3*a. L'équation vérifiée par $v(z, t)$ étant linéaire, on peut chercher une solution sous la forme d'une représentation complexe $\underline{v}(z, t) = v_0 e^{j(\omega t - k z)}$. On obtient

$$-k^2 v_0 e^{j(\omega t - k z)} - L_0 C_0 (-\omega^2) v_0 e^{j(\omega t - k z)} = [L_0 G + R C_0] j \omega v_0 e^{j(\omega t - k z)} + R G v_0 e^{j(\omega t - k z)}$$

soit, après simplification, $\underline{k}^2 = L_0 C_0 \omega^2 - [L_0 G + R C_0] j \omega - R G$.

D3*b. On peut écrire $\underline{v}(z, t) = v_0 e^{j(\omega t - (k' + j k'') z)} = v_0 e^{k'' z} e^{j(\omega t - k' z)}$. La grandeur réelle associée à $\underline{v}(z, t)$ est $v(z, t) = v_0 e^{k'' z} \cos(\omega t - k' z)$.

On reconnaît un phénomène de propagation de vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k'}$ et, si $k'' < 0$ (ce qui n'est pas précisé par l'énoncé) de distance caractéristique d'atténuation $\delta = -\frac{1}{k''}$.

D3*c. On peut écrire $\underline{k}^2 = L_0 C_0 \omega^2 \left[1 - j \left[\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right] - \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} \right]$.

Comme $\frac{R}{L_0 \omega} \ll 1$ et $\frac{G}{C_0 \omega} \ll 1$, on peut développer au deuxième ordre en $\frac{1}{\omega}$:

$$\underline{k} = \sqrt{L_0 C_0 \omega^2} \left[1 - \frac{1}{2} j \left[\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right] - \frac{1}{2} \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} - \frac{1}{8} \left[\left(\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 \right] + 2 j \left(\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right) \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} \dots \right]$$

$$\text{d'où } k' = \sqrt{L_0 C_0} \omega \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} + \frac{1}{8} \left(\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 \right]$$

$$= \sqrt{L_0 C_0} \omega \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} + \frac{1}{8} \left(\frac{G}{C_0 \omega} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{G}{C_0 \omega} \times \frac{R}{L_0 \omega} + \dots \right]$$

$$= \sqrt{L_0 C_0} \omega \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{G}{C_0 \omega} - \frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\text{et } k'' = -\frac{1}{2}\sqrt{L_0 C_0} \omega^2 \left[\left(\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right) \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} \dots \right] = -\frac{1}{2}\sqrt{L_0 C_0} \left(\frac{G}{C_0} + \frac{R}{L_0} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} \dots \right].$$

$$\text{On en déduit } v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{G}{C_0 \omega} - \frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 \right] \text{ et } \delta = \frac{2\sqrt{L_0 C_0}}{GL_0 + RC_0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} \dots \right] \text{ au}$$

premier ordre non nul en $\frac{1}{\omega}$.

Il n'y a pas déformation du signal si v_φ ne dépend pas de ω (à l'ordre du calcul). Il n'y a alors pas dispersion. C'est réalisé si $\frac{G}{C_0 \omega} - \frac{R}{L_0 \omega} = 0$ soit la condition $GL_0 = RC_0$. Cette condition est appelée condition de Heaviside.

δ n'est pas nul lorsque cette condition est vérifiée : le signal n'est pas déformé mais il est atténué.

$$\mathbf{D4*a.} \text{ Avec } R=0 \text{ et } G=0, \text{ l'équation de propagation devient } \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$$

donc $u = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$. On a $u = c$ d'après les expressions de L_0 et C_0 donc u a la dimension d'une vitesse.

La forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert est $v(z,t) = f(x-ut) + g(x+ut)$.

$\mathbf{D4*b.}$ Avec $R=0$ et $G=0$, l'équation établie en D2 conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2}$$

$\mathbf{D4*c.}$ La phase des fonction v_1 et i_1 , v_2 et i_2 , couple la variable d'espace et de temps: ces fonctions décrivent donc un phénomène de propagation.

Le signe de z et t est opposé dans la phase des fonction v_1 et i_1 : la propagation est vers les z croissants.

Le signe de z et t est le même dans la phase des fonction v_2 et i_2 : la propagation est vers les z décroissants.

$\mathbf{D4*d.}$ On a

$$\frac{\partial i_1(z,t)}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial v_1(z,t)}{\partial t} = -C_0 \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t} = -C_0 \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -C_0 \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial z} (-c)$$

donc $\frac{\partial i_1(z,t)}{\partial z} = C_0 c \frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z}$ que l'on peut intégrer en $i_1(z,t) = C_0 c v_1(z,t) + h(t)$. La fonction

$h(t)$ ne possède pas une phase qui couple les variables z et t donc elle ne décrit pas un phénomène progressif. On la prend donc nulle et il reste $i_1(z,t) = C_0 c v_1(z,t)$ ou $v_1(z,t) = R_C i_1(z,t)$ en posant

$$R_C = \frac{1}{C_0 c} \text{ soit } R_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \text{ Avec les expressions de } L_0 \text{ et } C_0, \text{ il vient } R_C = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{h-a}{a} \right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

On obtient de la même façon

$$\frac{\partial i_2(z,t)}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial v_2(z,t)}{\partial t} = -C_0 \frac{dg(\varphi)}{d\varphi} \frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t} = -C_0 \frac{dg(\varphi)}{d\varphi} = -C_0 \frac{dg(\varphi)}{d\varphi} \frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial z} (c) \text{ donc}$$

$$\frac{\partial i_2(z,t)}{\partial z} = -C_0 c \frac{\partial v_2(z,t)}{\partial z} \text{ que l'on peut intégrer en } v_2(z,t) = -R_C i_2(z,t).$$

$$\text{A.N. } R_C = \sqrt{\frac{0,318 \times 10^{-3}}{509 \times 10^{-9}}} = 25 \Omega \text{ et } u = \sqrt{\frac{1}{(0,318 \times 10^{-3})(509 \times 10^{-9})}} = 7,9 \times 10^4 \text{ km.s}^{-1}. \text{ La}$$

vitesse de propagation vaut environ $\frac{1}{4}c$ donc le milieu entre les deux fils n'est pas le vide.

D5*a. La ligne est infinie donc l'onde de tension ou de courant provoquée par la décharge du condensateur lorsque l'on ferme l'interrupteur se propage vers les z croissants sans phénomène de réflexion. On a donc, pour tout z et en particulier en $z = 0$, $v(z, t) = R_C i(z, t)$.

Le circuit équivalent est donc l'association série R_C , L et C .

D5*b. On peut écrire $v_C(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R_C i(t)$ et $i(t) = -C \frac{dv_C(t)}{dt}$ d'où

$v_C(t) = -LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} - R_C C \frac{dv_C(t)}{dt}$ que l'on peut écrire $\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_0^2 v_C(t) = 0$ en

posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{R_C}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

D5*c. On a une équation différentielle linéaire du deuxième ordre homogène. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$. Dans le cas où $m < 1$, on a $\Delta < 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont $r_{\pm} = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2}$ et la solution est de la forme $v_C(t) = e^{-m\omega_0 t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ en posant $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$.

$v_C(t)$ est la tension aux bornes d'un condensateur c'est donc une grandeur continue quel que soit t , en particulier $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ ce qui se traduit par $A = U$.

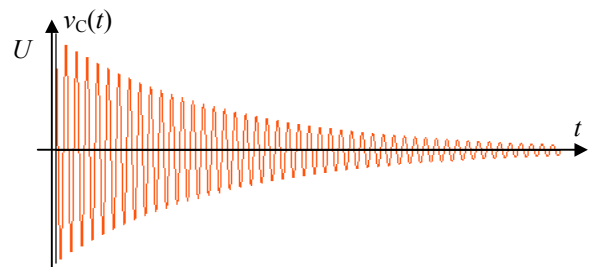
$i(t)$ est l'intensité du courant dans une branche contenant une bobine c'est donc une grandeur continue quel que soit t , en particulier $i(0^+) = i(0^-)$ ce qui se traduit par $-m\omega_0 A + \omega B = 0$ soit encore

$B = \frac{m\omega_0}{\omega} U$ donc il reste finalement $v_C(t) = U e^{-m\omega_0 t} \left[\cos(\omega t) + \frac{m\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right]$.

Avec $m = 10^{-2} \ll 1$, on peut faire le développement limité $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} m^2 + \dots \right)$ puis

$\frac{m\omega_0}{\omega} = \frac{m\omega_0}{\omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} m^2 + \dots \right)} = m$ d'où $v_C(t) = U e^{-m\omega_0 t} [\cos(\omega_0 t) + m \sin(\omega_0 t)]$ au premier ordre en m .

Comme le temps caractéristique de décroissance $\tau = \frac{1}{m\omega_0}$ est très grand devant la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ des oscillations, on peut tracer l'allure de la courbe ci-contre.



La tension est, en valeur absolue, définitivement inférieure à $U/100$ pour $t > t_C$ tel que $e^{-m\omega_0 t_C} = \frac{1}{100}$ soit

$t_C = \frac{\ln(100)}{m\omega_0} = \frac{\ln(100)}{2\pi m} T_0$. A.N. $t_C = \frac{\ln(100)}{2\pi \times 10^{-2}} T_0 \approx 73 \times T_0$.

D5*d. En $z = 0$, on a $v(0, t) = R_C i(0, t) = R_C i(t)$ avec $i(t) = -C \frac{d}{dt} [U e^{-m\omega_0 t} [\cos(\omega_0 t) + m \sin(\omega_0 t)]]$
 $= -CU e^{-m\omega_0 t} [-m\omega_0 [\cos(\omega_0 t) + m \sin(\omega_0 t)] + \omega_0 [-\sin(\omega_0 t) + m \cos(\omega_0 t)]] = CU \omega_0 e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 t)$ au premier ordre en m .

On obtient donc $v(0, t) = R_C CU \omega_0 e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 t) = 2m \sqrt{\frac{L}{C}} CU \frac{1}{\sqrt{LC}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 t)$
 $= 2m U e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 t)$

La perturbation créée se propage le long de la ligne à la vitesse c . L'état en un point z à l'instant t_C est la valeur de $v(0, t_1)$ à un instant précédent t_1 tel que $t_1 = t_C - \frac{z}{c}$. Quand z augmente, t_1

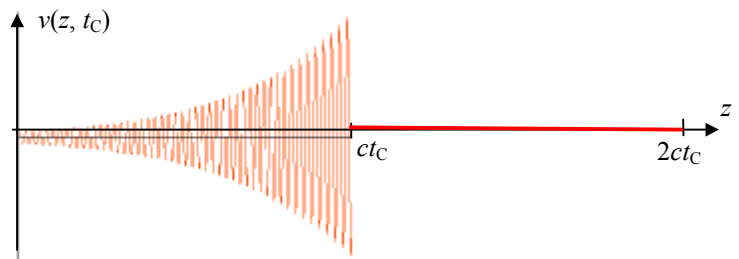
diminue donc $e^{-m\omega_0 t}$ augmente. La valeur est donc maximale au voisinage immédiat de $z_M = c \frac{t_C}{4}$ où

l'on a $v(z_M, t_C) = v\left(0, t_C - \frac{ct_C}{4c}\right) = 2mUe^{-m\omega_0 \frac{3}{4}t_C} \sin\left(\frac{3}{4}\omega_0 t_C\right)$ donc pratiquement $v_M = 2mUe^{-\frac{3}{4}m\omega_0 t_C}$.

À l'instant t_C , la valeur $v(0, 0)$ a atteint l'abscisse $z_C = ct_C$. Pour $z > z_C$, on a $v(z, t_C) = 0$ car $v(0, t) = 0$ pour $t < 0$.

De plus, $v(0, t_C) \approx v(0, 0)/100$.

On a donc la courbe suivante.



D5*e. L'énergie stockée initialement dans le condensateur est $W_0 = \frac{1}{2}CU^2$. À un

instant t , elle est $W_C(t) = \frac{1}{2}Cv_c^2(t)$.

L'énergie stockée dans la bobine est alors $W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$.

À cet instant, l'énergie stockée dans la tranche de ligne de longueur dz s'écrit :

$$dW_{\text{LIGNE}}(t) = \frac{1}{2}L_0 dz i^2(z, t) + \frac{1}{2}C_0 dz v^2(z, t) = \frac{1}{2}L_0 dz \frac{v^2(z, t)}{R_C^2} + \frac{1}{2}C_0 dz v^2(z, t) = C_0 v^2(z, t) dz$$

d'après l'expression de R_C . Comme $v(z, t) = 0$ pour $z > ct$, l'énergie totale stockée dans la ligne à l'instant t est $W_{\text{LIGNE}}(t) = \int_0^{ct} C_0 v^2(z, t) dz$.

En l'absence de perte, la conservation de l'énergie entraîne $W_0 = W_C(t) + W_L(t) + W_{\text{LIGNE}}(t)$

D5*f. Si la ligne n'est pas infinie, il se produit une réflexion à son extrémité. Il y aura superposition de l'onde initiale se propageant vers les z croissants et de l'onde réfléchi qui se propage vers les z décroissants. En l'absence d'amortissement, l'énergie initiale du condensateur, partiellement transportée par l'onde aller, revient par l'onde réfléchi et le condensateur se recharge avant de se décharger de nouveau. Il apparaît un régime d'oscillations à une période correspondant à deux fois la durée nécessaire pour parcourir toute la longueur de la ligne.

Troisième partie

E1. On peut écrire
$$\begin{cases} \underline{V}_e = \underline{V}(0) = \underline{V}_{10} + \underline{V}_{20} \\ \underline{I}_e = \underline{I}(0) = \frac{\underline{V}_{10}}{R_C} - \frac{\underline{V}_{20}}{R_C} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \underline{V}_s = \underline{V}(\ell) = \underline{V}_{10}e^{-jk\ell} + \underline{V}_{20}e^{jk\ell} \\ \underline{I}_s = \underline{I}(\ell) = \frac{\underline{V}_{10}}{R_C}e^{-jk\ell} - \frac{\underline{V}_{20}}{R_C}e^{jk\ell} \end{cases}$$

Le deuxième système d'équations conduit à $\underline{V}_{10} = \frac{\underline{V}_s e^{jk\ell} + R_C \underline{I}_s e^{jk\ell}}{2}$ et

$\underline{V}_{20} = \frac{\underline{V}_s e^{-jk\ell} - R_C \underline{I}_s e^{-jk\ell}}{2}$. En reportant dans le premier, on obtient

$$\begin{cases} \underline{V}_e = \frac{\underline{V}_s e^{jk\ell} + R_C \underline{I}_s e^{jk\ell}}{2} + \frac{\underline{V}_s e^{-jk\ell} - R_C \underline{I}_s e^{-jk\ell}}{2} \\ \underline{I}_e = \frac{1}{R_C} \left(\frac{\underline{V}_s e^{jk\ell} + R_C \underline{I}_s e^{jk\ell}}{2} \right) - \frac{1}{R_C} \left(\frac{\underline{V}_s e^{-jk\ell} - R_C \underline{I}_s e^{-jk\ell}}{2} \right) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \underline{V}_e = \underline{V}_s \cos(k\ell) + jR_C \underline{I}_s \sin(k\ell) \\ \underline{I}_e = j \frac{\underline{V}_s}{R_C} \sin(k\ell) + \underline{I}_s \cos(k\ell) \end{cases}$$

qui est bien de la forme proposée en posant $f(k\ell) = \cos(k\ell)$ et $g(k\ell) = \sin(k\ell)$.

E2. À la sortie, on a $\underline{V}_S = R_U \underline{I}_S$ donc on peut écrire $\underline{Z}_e = \frac{V_e}{I_e} = \frac{R_U \cos(k\ell) + jR_C \sin(k\ell)}{j \frac{R_U}{R_C} \sin(k\ell) + \cos(k\ell)}$ soit

$\underline{Z}_e = R_C \frac{R_U + jR_C \tan(k\ell)}{jR_U \tan(k\ell) + R_C}$. Si $R_U = R_C$, il reste $\underline{Z}_e = R_C$. La ligne, de longueur finie, est fermée sur son impédance caractéristique et possède alors les propriétés d'une ligne infinie : il n'y a pas d'onde réfléchie.

F1. La loi d'Ohm s'écrit pour la sortie de la ligne : $v_S(t) = R_U i_S(t)$ [$\mathcal{R}a$].

La tension totale à la sortie s'écrit : $v_S(t) = v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right) + v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right)$ [$\mathcal{R}b$].

De même, l'intensité totale à la sortie est $i_S(t) = i_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right) + i_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right)$ [$\mathcal{R}c$].

À l'aide des relations entre v et i pour les ondes incidentes et réfléchies, il vient

$$i_S(t) = \frac{v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right)}{R_C} - \frac{v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right)}{R_C} \quad [\mathcal{R}d].$$

On reporte [$\mathcal{R}b$] et [$\mathcal{R}d$] dans [$\mathcal{R}a$] et l'on obtient :

$$v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right) + v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right) = R_U \left[\frac{v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right)}{R_C} - \frac{v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right)}{R_C} \right] \quad \text{d'où} \quad v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right) = -v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right) \frac{1 - \frac{R_U}{R_C}}{1 + \frac{R_U}{R_C}} \quad \text{qui}$$

est bien de la forme demandée en posant $\alpha = \frac{R_U - R_C}{R_U + R_C}$.

Avec un changement d'origine des temps tel que $t = t' - \frac{\ell}{c}$, on obtient $v_2(t') = \alpha v_1\left(t' - \frac{2\ell}{c}\right)$.

α est le coefficient de réflexion de l'amplitude de la tension.

- Si $R_U = 0$ (sortie court-circuitée), on trouve $\alpha = -1$: la tension se réfléchit en changeant de signe.

- Si $R_U = R_C$ (sortie adaptée), on trouve $\alpha = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie.

- Si $R_U = \infty$ (sortie ouverte), on trouve $\alpha = +1$: la tension se réfléchit sans changer de signe.

F2. Pour $t \geq 0$, la loi d'Ohm s'écrit à l'entrée de la ligne : $v_e(t) = E - R_G i_e(t)$ [$\mathcal{R}e$].

La tension totale à l'entrée s'écrit : $v_e(t) = v_1(t) + v_2(t)$ [$\mathcal{R}f$].

L'intensité totale à l'entrée est $i_S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ [$\mathcal{R}g$].

À l'aide des relations entre v et i pour les ondes incidentes et réfléchies, il vient

$$i_e(t) = \frac{v_1(t)}{R_C} - \frac{v_2(t)}{R_C} \quad [\mathcal{R}h].$$

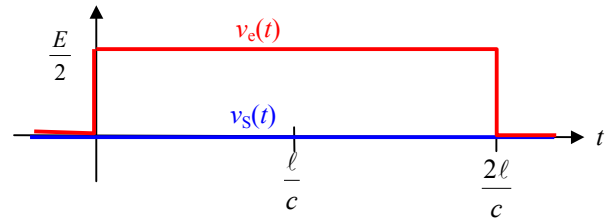
On reporte [$\mathcal{R}f$] et [$\mathcal{R}h$] dans [$\mathcal{R}e$] et l'on obtient, pour $t \geq 0$ et $R_G = R_C$, $v_1(t) + v_2(t) = E - [v_1(t) - v_2(t)]$ d'où $v_1(t) = \frac{E}{2}$.

F3. En $t = 0^+$, il n'y a que l'onde incidente v_1 donc $v_e(0^+) = \frac{E}{2}$. Ce passage de $v_e(0^-) = 0$ à $v_e(0^+) = \frac{E}{2}$ se propage à la vitesse c le long de la ligne sans perte et atteint l'extrémité de la ligne à l'instant $t_1 = \frac{\ell}{c}$.

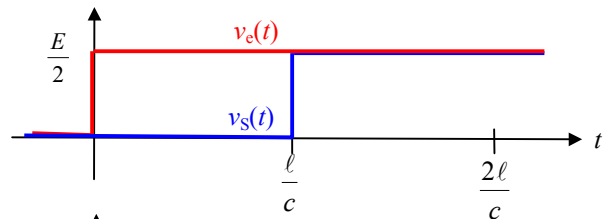
D'après la question F1, l'amplitude de l'onde réfléchie (si elle existe) dépend de la valeur de R_U . Elle se propage aussi à la vitesse c et atteint donc l'origine de la ligne à l'instant $t_2 = \frac{2\ell}{c}$.

Comme $R_G = R_C$, l'extrémité $z = 0$ se comporte comme une ligne infinie pour une éventuelle onde réfléchie se propageant vers les z décroissants. Il n'y a donc jamais de réflexion à cette extrémité. La valeur de v_S est donc définitive pour $t \geq t_1$ et celle de v_e pour $t \geq t_2$.

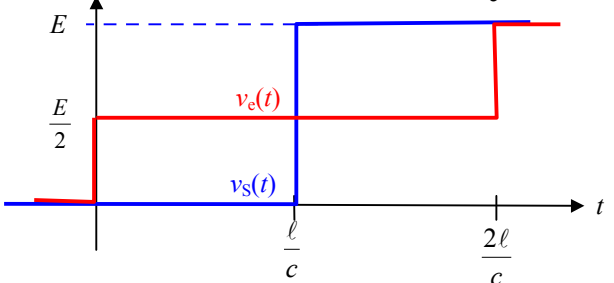
- Si $R_U = 0$, $\alpha = -1$ et $v_S(t) = 0$ quel que soit t . Pour $t \geq t_2$, l'onde réfléchie, d'amplitude $-\frac{E}{2}$ a atteint l'extrémité $z = 0$ donc $v_e = 0$. Par contre, pour $0 \leq t < t_2$, $v_e(t) = v_1(t) = \frac{E}{2}$. On en déduit les courbes ci-contre :



- Si $R_U = R_C$, $\alpha = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie donc $v_S(t) = v_e\left(t - \frac{\ell}{c}\right)$ avec $v_e(t) = v_1(t) = \frac{E}{2}$ quel que soit $t \geq 0$. On en déduit les courbes ci-contre :



- Si $R_U = \infty$, $\alpha = 1$. Pour $t \geq t_1$, il existe une onde réfléchie, d'amplitude $\frac{E}{2}$ donc $v_S = v_1 + v_2 = E$ pour $t \geq t_1$. Cette onde réfléchie atteint l'extrémité $z = 0$ à l'instant t_2 donc $v_e = E$ pour $t \geq t_2$. On en déduit les courbes ci-contre :

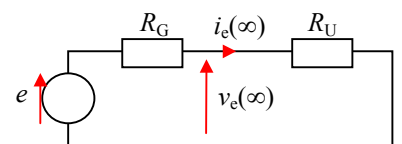


F4. Si $R_G \neq R_C$, il se produit une réflexion à l'extrémité $z = 0$ de la ligne. Si $R_U \neq R_C$, il se produit une réflexion à l'extrémité $z = \ell$ de la ligne.

En $t = 0$, il n'y a que l'onde incidente v_1 donc les équations de F2 conduisent à

$$v_e(0) = \frac{R_C}{R_G + R_C} E.$$

En $t = \infty$, le nouveau régime constant est établi donc les inductances sont équivalentes à des courts-circuits et les condensateurs à des circuits ouverts. Le schéma électrique équivalent est donc le suivant :

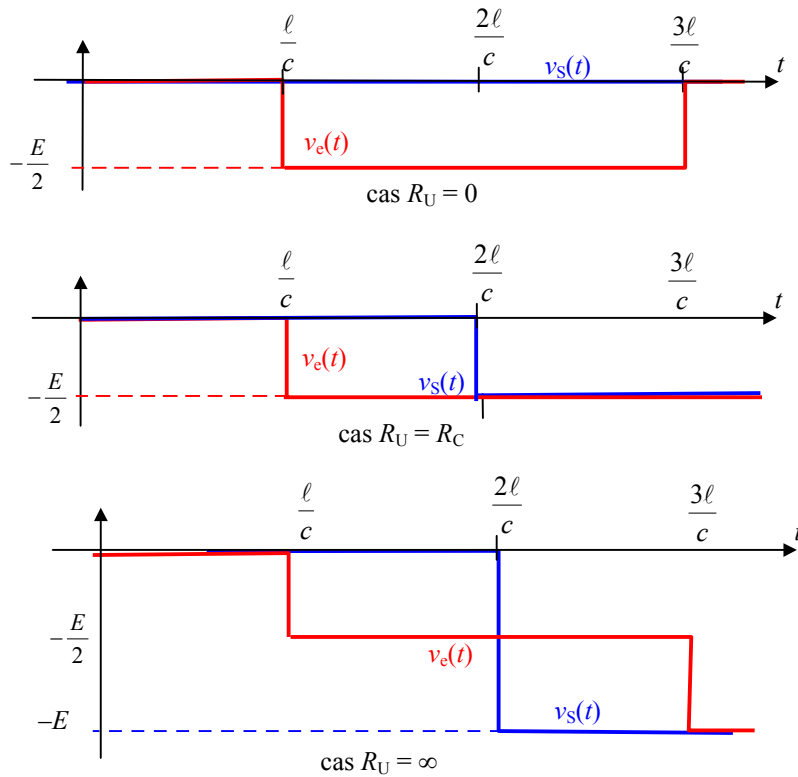


Le théorème du diviseur de tension conduit alors à

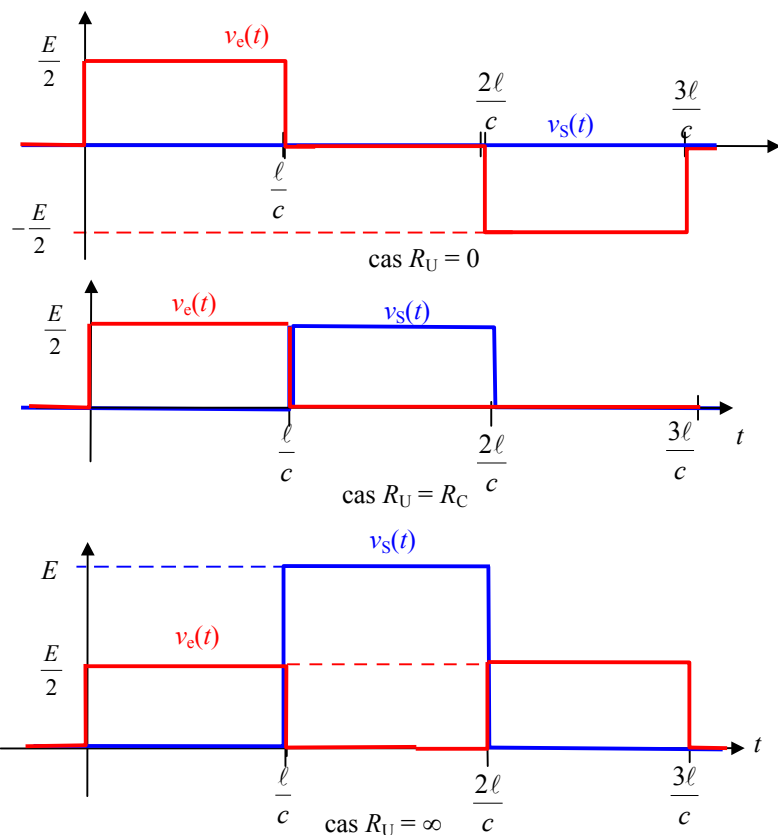
$$v_e(\infty) = E \frac{R_U}{R_G + R_U}.$$

Les ondes se propageant à la célérité c , il se produit un changement dans l'état du circuit aux instants où une onde atteint une extrémité ($z = \ell$ ou $z = 0$) de la ligne soit $t_n = n \frac{\ell}{c}$.

F5. On peut appliquer le principe de superposition en considérant un échelon de valeur $-E$ appliqué en $t_1 = \frac{\ell}{c}$. On aurait pour celui-ci les courbes suivantes, dans le cas $R_G = R_C$ où il n'y a pas de nouvelle réflexion en $x = 0$:



Pour l'impulsion, on aura donc :



F6. Dans le cas $R_U = R_C$ où la ligne se comporte comme si elle était infinie, la durée de l'impulsion peut être quelconque sans apporter de changement au schéma indiqué. Le début de l'impulsion se produira en $z = \ell$ à l'instant $t = \frac{\ell}{c}$.

Dans les autres cas où il se produit une réflexion en $z = \ell$, le front montant de l'impulsion de retour arrivera en $z = 0$ avant que le front descendant de l'impulsion de départ soit apparu. On aura donc modification de la forme de signal v_e .

Dans le cas $R_U = 0$, l'impulsion de retour est négative donc la superposition avec l'impulsion de départ donne zéro et le signal $v_e(t)$ a un front descendant en $t = \frac{2\ell}{c}$ suivi d'une impulsion négative.

Dans le cas $R_U = \infty$, l'impulsion de retour est positive et s'ajoute à la fin de l'impulsion initiale après $t = \frac{2\ell}{c}$ pour former un créneau d'amplitude $2E$.