PSI*	Corrigé D.S. N°2	Mardi 17 novembre 2009

COURANTS DE FOUCAULT DANS UNE PLAQUE METALLIQUE (e3a PSI 2008)

A.1) A l'intérieur du métal, la loi d'Ohm locale s'écrit : $\boxed{\vec{J}(M,t)=\sigma\vec{E}(M,t)}$.

A.2) Le dispositif étudié est invariant par translation selon Oy, donc H(x,y,z,t) ne dépend pas de y. Par ailleurs $\operatorname{div}\vec{B}=0=\mu_0\mu_r\operatorname{div}\vec{H}$, donc : $\dfrac{\partial H}{\partial z}=0$. Il en résulte que H ne peut dépendre que de la variable spatiale x : $\boxed{\vec{H}=H(x,t)\vec{u}_z}$.

A.3) L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H}=\vec{J}$ conduit à :

$$\vec{J}=\overrightarrow{\text{rot}}\left(H(x,t)\vec{u}_z\right)=\overrightarrow{\text{grad}}\left(H(x,t)\right)\wedge\vec{u}_z+\vec{0}=\frac{\partial H}{\partial x}\vec{u}_x\wedge\vec{u}_z=-\frac{\partial H}{\partial x}\vec{u}_y \text{ soit : } \boxed{J=-\frac{\partial H}{\partial x}}.$$

La loi de Lenz affirme que le courant induit par les variations de champ magnétique tend à s'opposer au champ qui lui a donné naissance. Le courant de densité volumique $\vec{J}=J(x,t)\vec{u}_y$ présente pour plan de symétrie les plans parallèles à xOy. Le champ magnétique qu'il crée est donc parallèle à Oz et peut donc s'opposer au champ qui lui a donné naissance puisqu'il a la même direction.

A.4) L'équation de Maxwell-Faraday conduit à: $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}=\dfrac{1}{\sigma}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{J}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mu_0\mu_r\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$.

Comme $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H}=\vec{J}$, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H}\right)=-\mu_0\mu_r\sigma\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ et avec

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H}\right)=\overrightarrow{\text{grad}}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{H}\right)}_{=0}-\vec{\Delta}\vec{H}$ il vient : $\vec{\Delta}\vec{H}-\mu_0\mu_r\sigma\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0$ ou : $\boxed{\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\mu_0\mu_r\sigma\dfrac{\partial H}{\partial t}=0}$.

En dérivant cette équation par rapport à x, on a : $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)-\mu_0\mu_r\sigma\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)=0$ soit,

puisque $J=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$: $\boxed{\dfrac{\partial^2 J}{\partial x^2}-\mu_0\mu_r\sigma\dfrac{\partial J}{\partial t}=0}$.

Une telle équation est appelée équation de diffusion.

A.5) En utilisant la notation complexe, on a : $\dfrac{\partial\underline{H}}{\partial t}=j\omega\underline{H}$ et les équations s'écrivent alors :

$$\boxed{\frac{\partial^2\underline{H}}{\partial x^2}-j\omega\mu_0\mu_r\sigma\underline{H}=0} \text{ ou } \boxed{\frac{\partial^2\underline{J}}{\partial x^2}-j\omega\mu_0\mu_r\sigma\underline{J}=0}$$