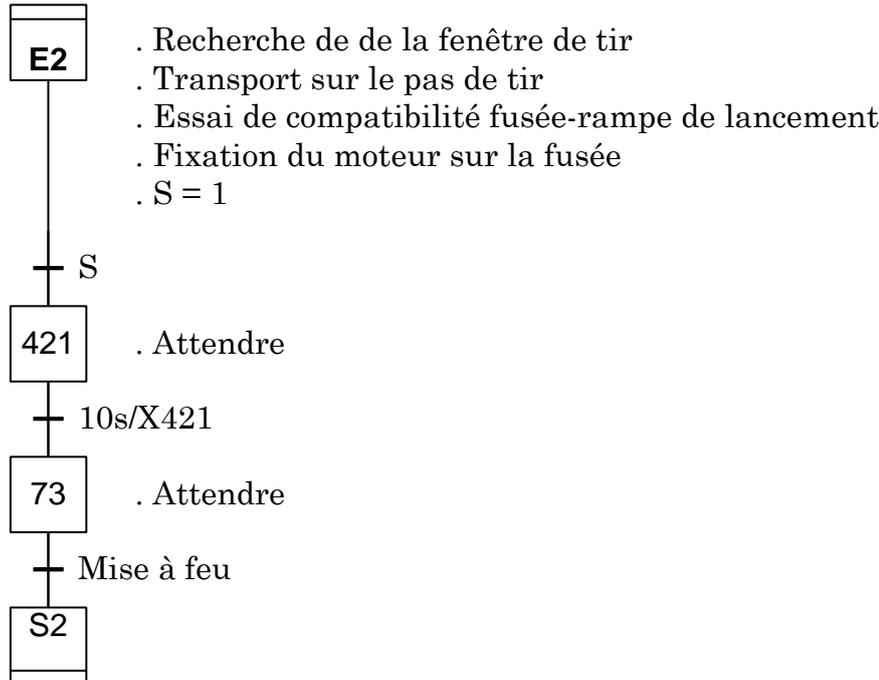
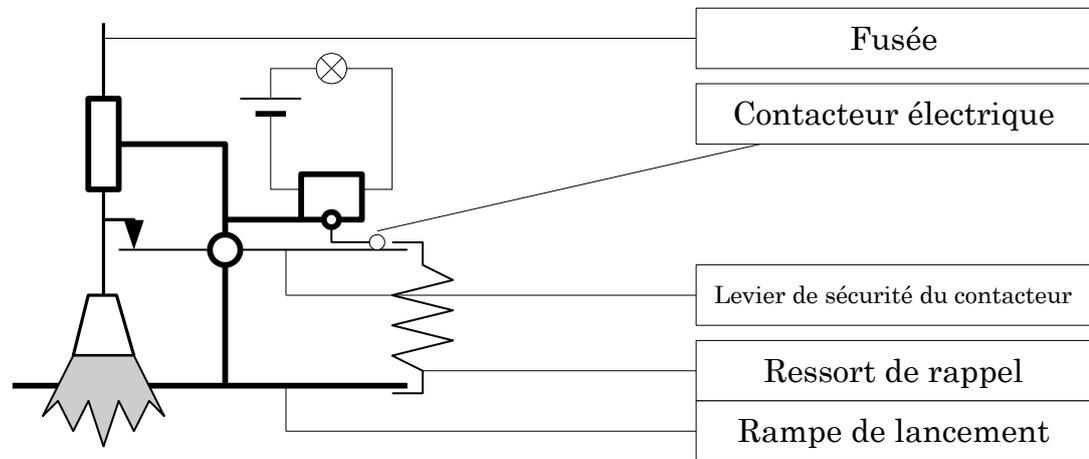


1 Partie A : étude du vol de la fusée

A11)



A12)



A13) Soit t_0 la date à laquelle le contacteur de la rampe de lancement ait constaté que la fusée n'est plus « en contact » avec le sol.

- T_1 : trois secondes après la date t_0 , l'asservissement du roulis (en phase balistique) démarre ;
- T_2 : seize secondes après la date t_0 , ouverture du parachute (en phase de descente libre) ;
- $T_3 = 40$ s : quarante secondes après la date t_0 , arrêt de la transmission et de l'enregistrement des données fournies par les capteurs de l'expérience embarquée (phase d'arrêt).

A14) On ne lance pas n fusées de manière cyclique, mais une seule !

A21) Voir la Figure 1-1.

- Phase de propulsion ($t_0 \leq t \leq 2$) :

F_{mot} existe et sa norme est constante durant deux secondes. Il semblerait donc qu'il faille éteindre le moteur à la fin de la phase ou plus vraisemblablement la durée de phase d'extinction doit être très courte devant la durée de fonctionnement à poussée quasi constante.

$$\theta(0) = 80^\circ ;$$

- Phase de montée balistique :

$$F_{mot} = 0 ; m = C^{ste} \square 8 \text{ kg} ; \gamma(t) \geq 0.$$

- Apogée

$$F_{mot} = 0 ; m = C^{ste} \square 8 \text{ kg} ; \gamma(t) = 0.$$

- Phase de descente balistique :

$$F_{mot} = 0 ; m = C^{ste} \square 8 \text{ kg} ; \gamma(t) \leq 0.$$

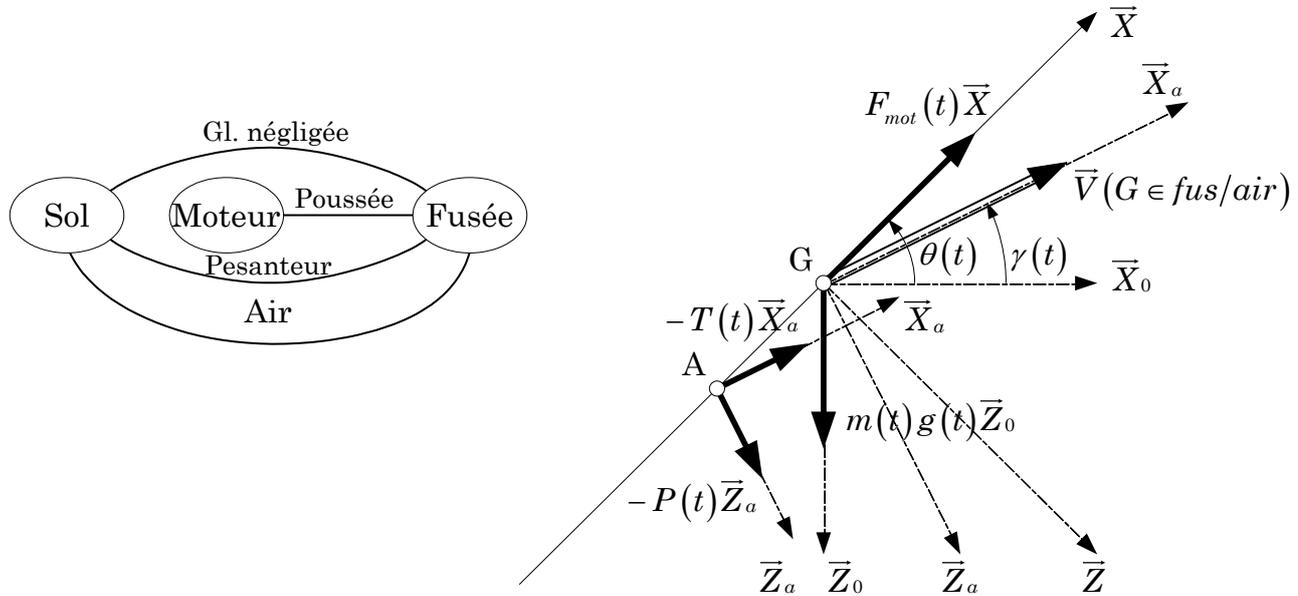


Figure 1-1 : Graphe et schémas « explicites ».

Remarque :

Dans tous les cas, les effets horizontaux: de la traînée s'opposent au mouvement de translation horizontal de la fusée et les effets verticaux de la portance s'opposent au mouvement de chute de la fusée.

En montée, les effets verticaux de la traînée s'ajoutent au poids de la fusée et les effets horizontaux de la portance s'opposent au mouvement de translation horizontal de la fusée.

En descente, les effets verticaux de la traînée s'opposent au poids de la fusée et les effets horizontaux de la portance accélèrent le mouvement de translation horizontal de la fusée.

A22) Si d'aventure une perturbation (remous d'air, variation de la masse volumique de l'air, heurt avec un canard, mouvement chaotique de la fusée,...) provoque une rotation $\pm \varepsilon$ de l'axe de la fusée par rapport à \bar{X}_a , la position du centre de poussée du champ d'effort aérodynamique par rapport à G a les conséquences suivantes :

- A en avant, par rapport à G : l'examen attentif de la Figure 1-2 que $\bar{M}(G, air \rightarrow fusée)$ provoque une augmentation de ε ;
- A en arrière, par rapport à G : c'est l'inverse.

Bilan : A doit être en arrière par rapport à G .

A31) $\theta = \gamma \Rightarrow P \square 0$. Isolement de la fusée. Principe fondamental de la dynamique appliqué à la fusée :

$F (sol \xrightarrow{pes} fus) + F (sol \xrightarrow{air} fus) + F (mot \rightarrow fus) = D (fus/sol)$ réduit à sa résultante :

$$m(t)g(t)\bar{Z}_0 - T(t)\bar{X}_a + F_{mot}\bar{X} = \int_{fus} \bar{A}(P/sol) dm(P,t) \quad [1]$$

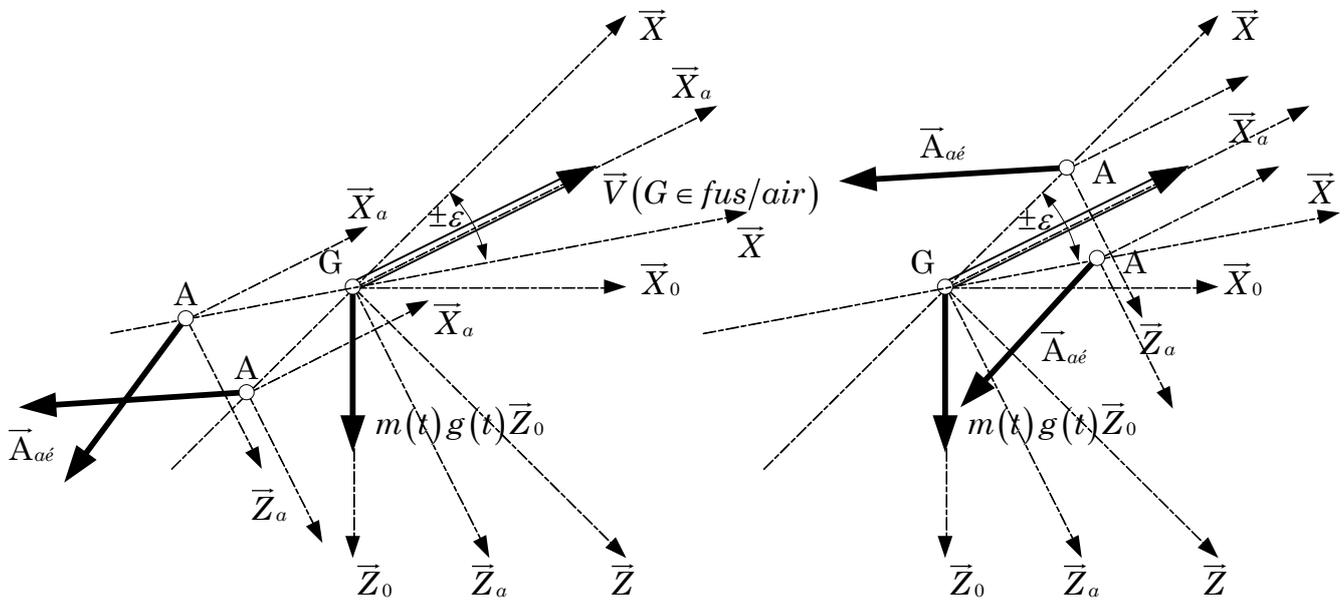


Figure 1-2 : Effet de la position de centre de poussée sur la « stabilité » angulaire de la fusée autour de la trajectoire de son centre d'inertie.

- Phase de propulsion :

On ne peut rien dire, a priori, car la fusée – dans cette phase là – n'est pas un **système à masse conservative** (la masse varie de 20% en 2 s !). L'intégrale du membre de droite n'est plus calculable dans le cadre du programme :

$$\int_{fus} \vec{A}(P/sol) dm(P,t) \neq m_{fusée}(t) \vec{A}(G_{fusée}(t)/sol)$$

- Phase de montée balistique :

Le membre de droite de [1] donne dans cette phase classique $m\vec{A}(G/sol)$. Dans le membre de gauche la poussée motrice est nulle ; d'où :

$$\vec{A}(G/sol) : \begin{cases} \frac{-T(t)\cos[\theta(t)]}{m} \\ 0 \\ g(t) + \frac{T(t)\sin[\theta(t)]}{m} \end{cases}$$

- Phase de descente balistique :

Idem.

A32)

- $T(\rho, S, C_T)$:

- la masse volumique de l'air est variable en fonction de l'altitude (une relation bien connue en mécanique des fluides $\rho = \rho_0 \frac{20\,000 + Z}{20\,000 - Z}$) et de plus l'air n'a aucune raison d'être un fluide homogène (durée 20 s et trajectoire de 2 000 m).
- Le maître couple de la fusée varie probablement lorsque la géométrie de la fusée varie ; or celle-ci est munie d'ailerons dont la position par rapport à la fusée est réglable (Cf. la partie asservissement). Si l'inclinaison de ces derniers influe sur le comportement mécanique de la fusée
- Le coefficient de traînée de la fusée ; d'ailleurs que ce coefficient soit donné avec un seul chiffre significatif est suspect, cela indique une méconnaissance de sa valeur dont une variabilité possible.

- L'annexe 4 indique que θ est variable ;

- L'accélération de la pesanteur varie en fonction de l'altitude et de plus varie en fonction de la position du pas de tir sur le géoïde de référence.

Bilan : tous les paramètres sont susceptibles de varier au cours d'un tir.

$$\mathbf{A33)} \bar{A}(G/sol) = \frac{d\bar{V}(G/sol)}{dt} \Bigg|_{sol} \Rightarrow \bar{A}_i(G/sol) \approx \frac{\bar{V}_i(G/sol) - \bar{V}_{i-1}(G/sol)}{\delta t}$$

$$\boxed{\bar{V}_i(G/sol) \approx \bar{V}_{i-1}(G/sol) + \bar{A}_i(G/sol)\delta t.}$$

$$\bar{V}(G/sol) = \frac{d\overline{OG}}{dt} \Bigg|_{sol} \Rightarrow \bar{V}_i(G/sol) \approx \frac{\overline{OG}_i - \overline{OG}_{i-1}}{\delta t}$$

$$\boxed{\overline{OG}_i \approx \overline{OG}_{i-1} + \bar{V}_i(G/sol)\delta t \approx \overline{OG}_{i-1} + \bar{V}_{i-1}(G/sol)\delta t + \bar{A}_i(G/sol)\delta t^2}$$

A34)

Lors du calcul numérique pas à pas, on peut avoir une idée du comportement de la phase propulsée de la fusée en supposant que sa masse ne varie pas entre deux phases du calcul ; alors :

$$\bar{A}(G/sol) : \begin{cases} \frac{(-T(t) + F)\cos[\theta(t)]}{m} \\ 0 \\ g(t) + \frac{(T(t) - F)\sin[\theta(t)]}{m} \end{cases}$$

t _i	A _{i-X}	A _{i-Z}	V _{i-X}	V _{i-Z}	X _i	Z _i	VG _i	T _i	Thêta _i	m _i	Fext
0,2			4,17	-23,64	0,00	0,00	24,00	1,13	80,00	10	800
1,2	13,87	-68,86	18,04	-92,50	18,04	-92,50	94,24	17,35	78,96	9	800
2,2	16,65	-75,54	34,69	-168,04	52,73	-260,54	171,58	57,52	78,34	8	0
3	-1,45	16,85	33,52	-154,56	86,25	-415,10	158,15	48,87	77,76	8	0
4	-1,29	15,78	32,23	-138,78	118,48	-553,88	142,47	39,66	76,93	8	0
5	-1,12	14,64	31,11	-124,14	149,59	-678,03	127,98	32,00	75,93	8	0
6	-0,97	13,69	30,14	-110,45	179,72	-788,48	114,49	25,61	74,74	8	0
7	-0,84	12,90	29,29	-97,56	209,01	-886,04	101,86	20,27	73,29	8	0
8	-0,73	12,24	28,56	-85,32	237,58	-971,36	89,97	15,81	71,49	8	0
9	-0,63	11,68	27,94	-73,63	265,51	-1044,99	78,76	12,12	69,22	8	0
10	-0,54	11,23	27,40	-62,41	292,91	-1107,40	68,16	9,08	66,30	8	0
11	-0,46	10,85	26,94	-51,56	319,86	-1158,96	58,17	6,61	62,41	8	0
12	-0,38	10,54	26,56	-41,02	346,42	-1199,97	48,87	4,66	57,08	8	0
13	-0,32	10,30	26,24	-30,72	372,66	-1230,69	40,40	3,19	49,49	8	0
14	-0,26	10,11	25,98	-20,60	398,64	-1251,30	33,16	2,15	38,41	8	0
15	-0,21	9,98	25,77	-10,63	424,42	-1261,92	27,88	1,52	22,41	8	0
16	-0,18	9,88	25,60	-0,75	450,02	-1262,67	25,61	1,28	1,67	8	0
17	-0,16	9,81	25,44	9,07	475,45	-1253,60	27,01	1,42	-19,62	8	0
18	-0,17	9,75	25,27	18,82	500,72	-1234,78	31,51	1,94	-36,68	8	0

Les résultats grisés me semblent suspect car traités comme de la mécanique du point et non comme une sommation continue de matière en mouvement.

Je ne me revoyais pas non plus refaire la théorie de la fusée pour un sujet de trois heures ne demandant pas, a priori, autant d'initiative.

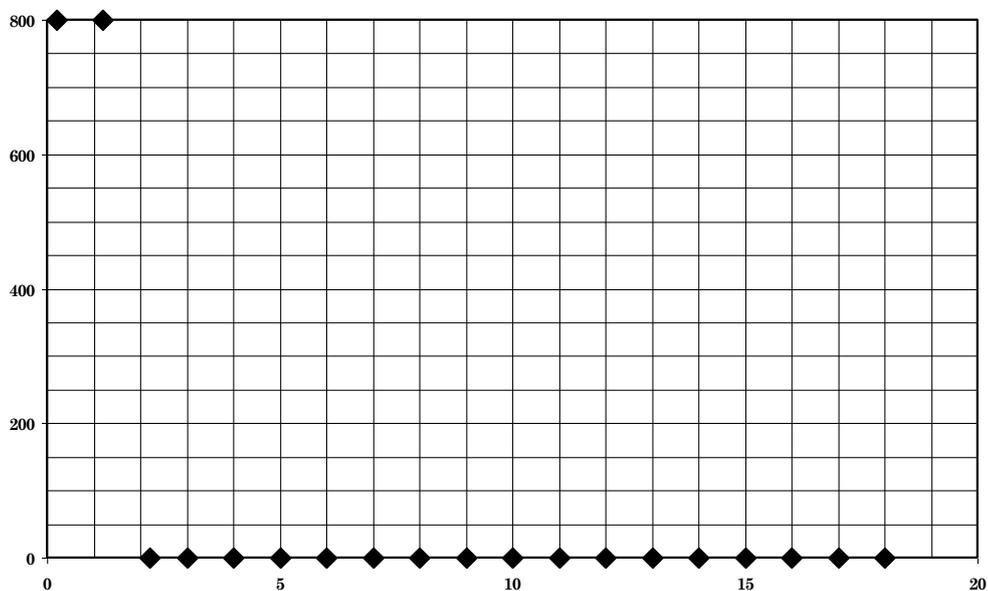


Figure 1-3 : Evolution de la poussée du moteur

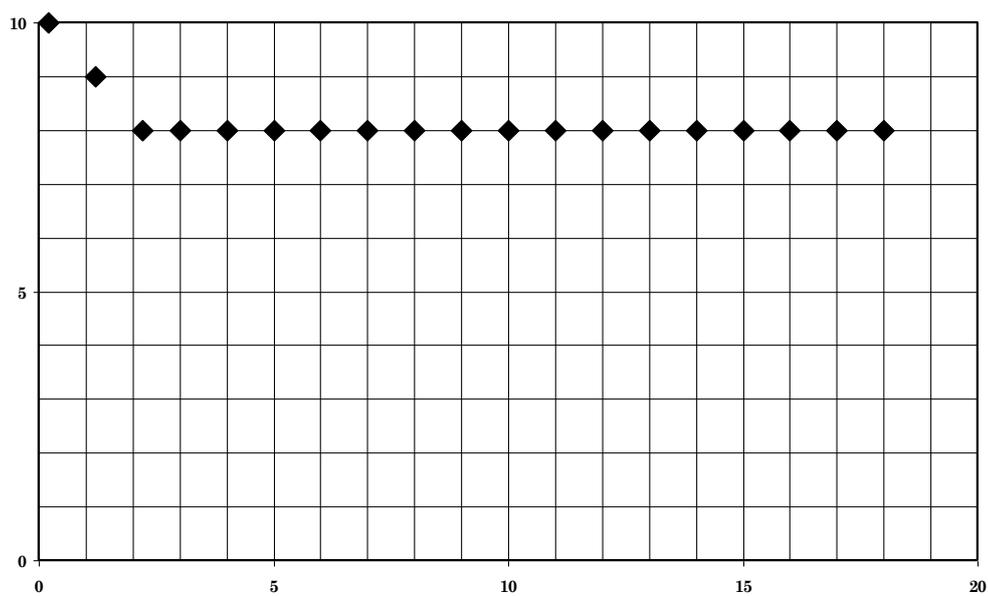


Figure 1-4 : Evolution de la masse de la fusée

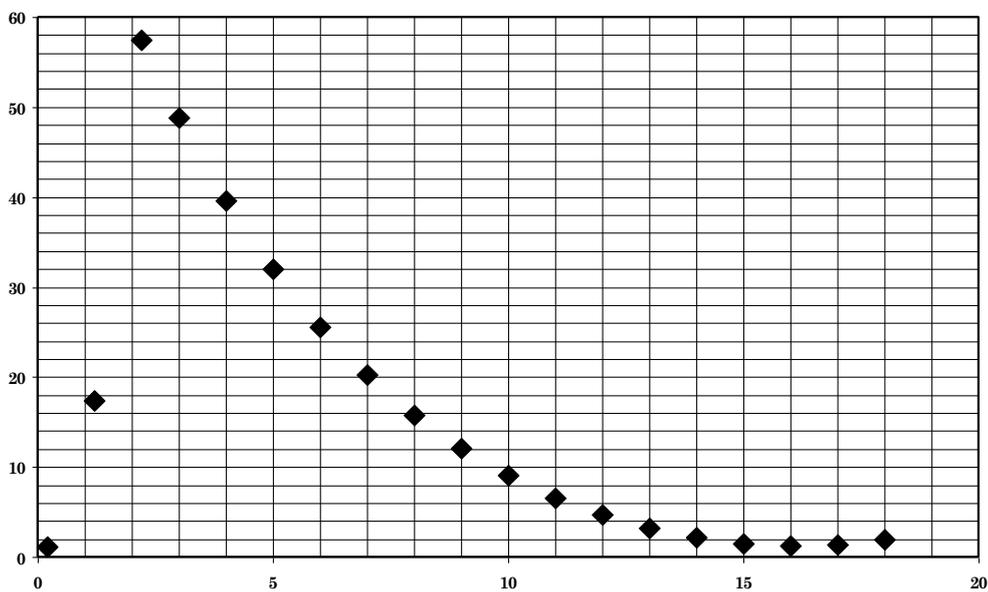


Figure 1-5 : Evolution de la traînée

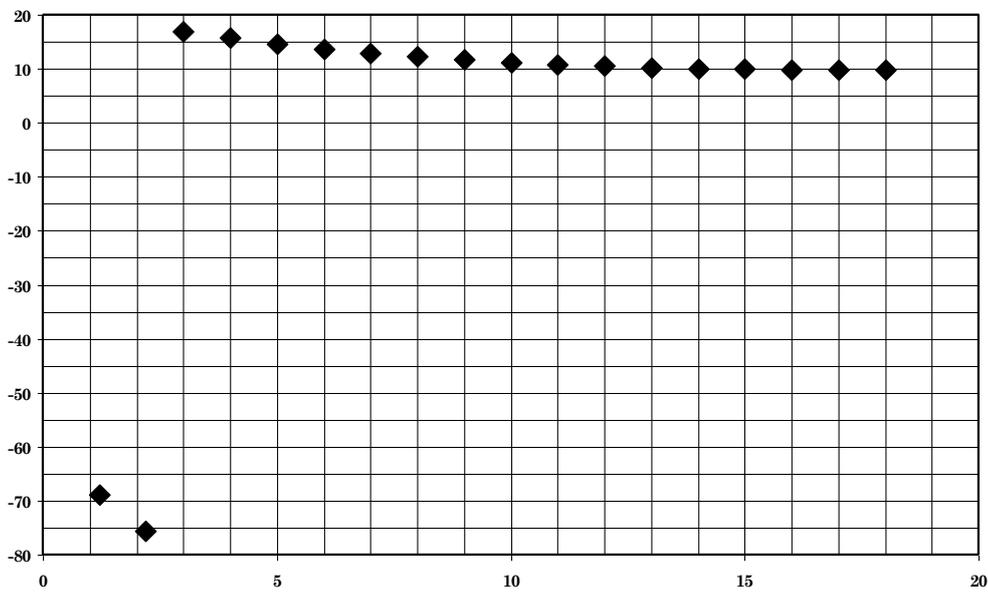


Figure 1-6 : Evolution de l'accélération du centre d'inertie de la fusée

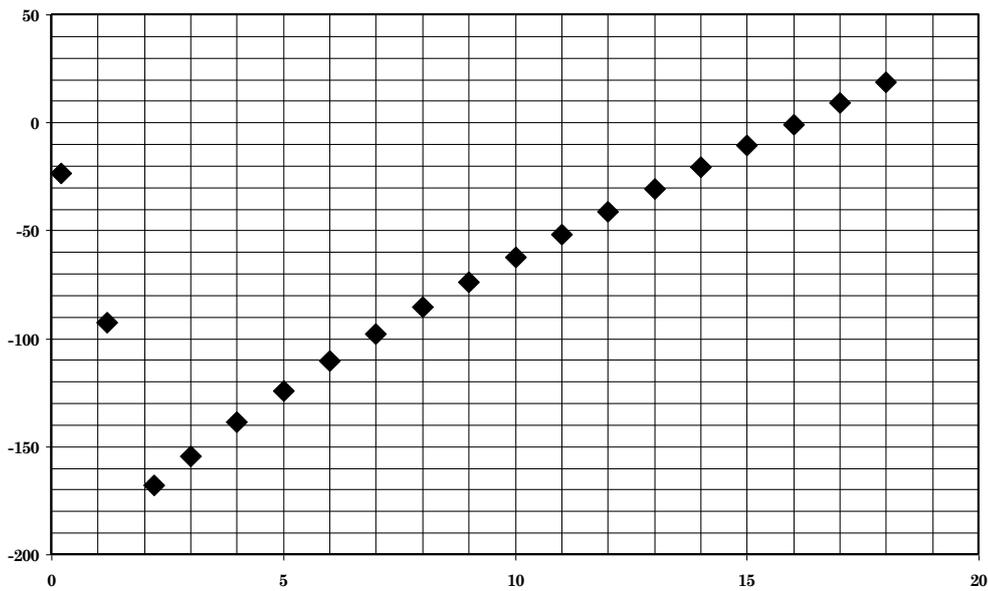


Figure 1-7 : Evolution de la vitesse du centre d'inertie de la fusée

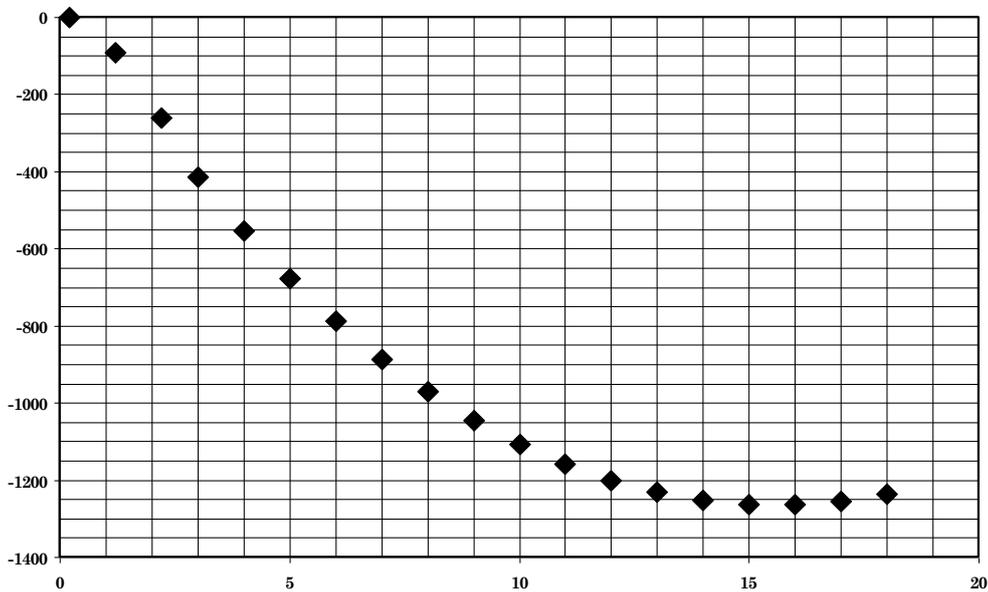


Figure 1-8 : Evolution de l'altitude du centre d'inertie de la fusée

L'avant dernier paragraphe de la page 2 indique que la phase de descente ne semble pas exister : on ouvre le parachute dès que la fusée descend. L'apogée semble être atteinte au bout de 16 s (Cf la Figure 1-8). La marge de sécurité ne semble pas suffisante (quasi nulle) par rapport à A13) ; 20 s serait un meilleur choix pour la temporisation T_2 compte tenu de l'incertitude (non demandée et non calculée dans ce problème).

2 Partie B : étude de l'asservissement.

B1) Le relevé « expérimental » est curieux :

- Pas de rectangles d'erreur,
- Présence d'une courbe spline de lissage.

Discussion :

La Figure 2-1 montre à l'envie que tout un tas d'approximation de $C_p(\alpha')$ peuvent être utilisés.

Sans rectangles d'erreur on ne peut estimer la pertinence mathématico-physique de l'approximation.

La seule chose pertinente qu'on puisse dire, c'est que les asservissements étudiés par le programme sont impérativement linéaires. Donc pour que nous puissions gérer le roulis de la fusée il faut que celui-ci soit réduit à un système linéaire.

Évaluation :

Sans valeur numérique de $C_p(\alpha')$ et de son encadrement, je ne vois pas comment « évaluer » (valeur moyenne et écart-type) la pente de la courbe d'approximation.

Pifométriquement, traçons une droite passant par (0,0) et calculons **une** valeur de la

pente de la droite : $\lambda_m \square \frac{0,7}{16} \square 0,04 \pm ?$

Voici une estimation excelienne de la méthode des moindres carrés :

Equation $Y = 0.04414215686 * X$

Number of data points used = 9

Average X = 8

Average Y = 0.33

Residual sum of squares = 0.0330995

Coef of determination, R-squared = 0.979607

Residual mean square, sigma-hat-sq'd = 0.00413744

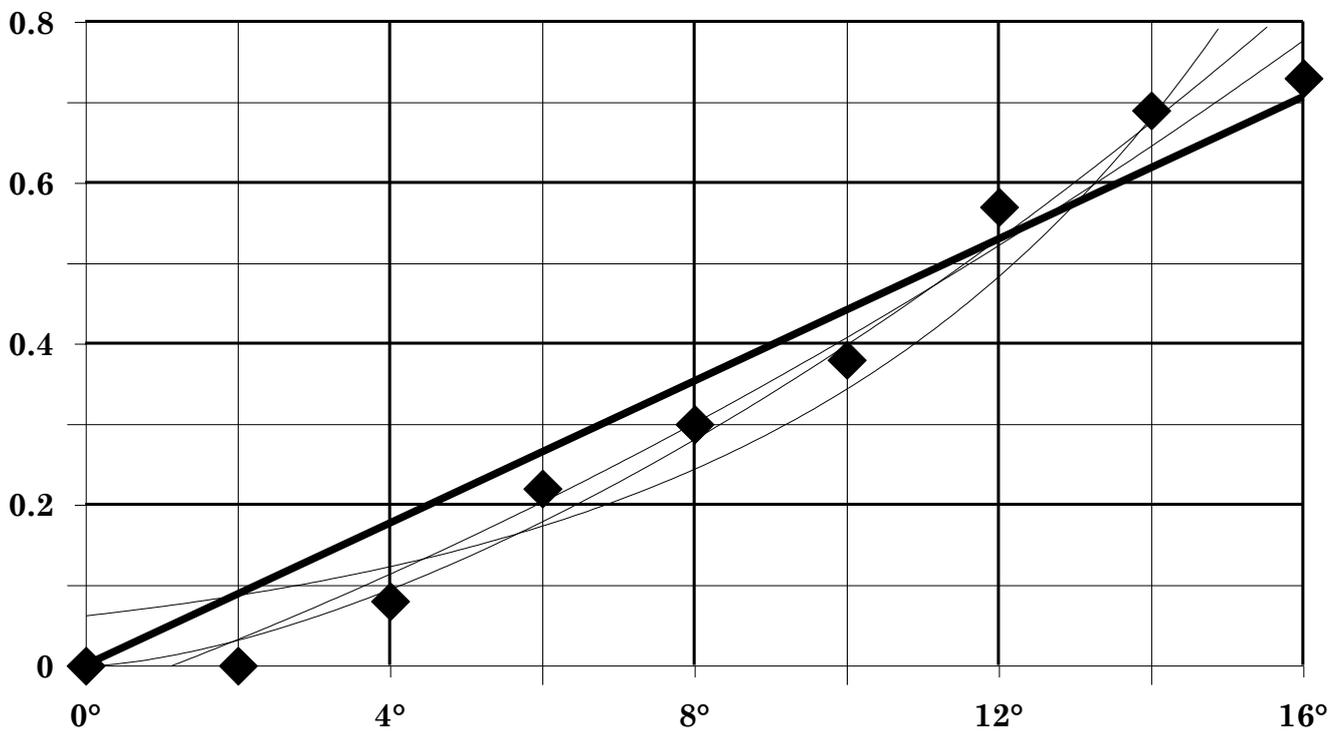


Figure 2-1 : Evolution de Cp

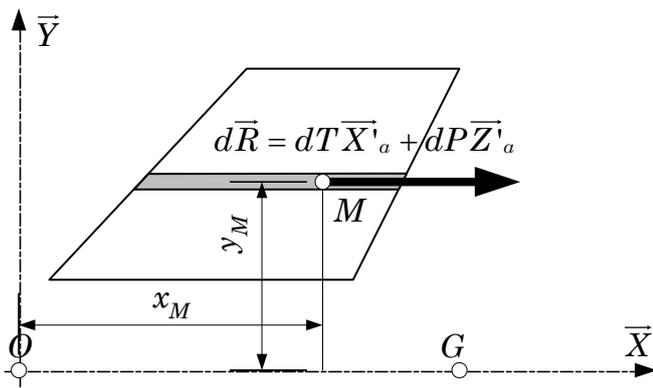
B21)

$$\begin{aligned} \vec{V}(M \in fus/air) &= \vec{V}(G \in fus/air) + \vec{\Omega}(fus/air) \wedge \vec{GM} \\ &= V_G \vec{X} + \Omega \vec{X} \wedge ((x_M - x_G) \vec{X} + y_M \vec{Y}) \quad ; \text{évidences : } V_G = \|\vec{V}(G \in fus/air)\| \\ &= \boxed{V_G \vec{X} + \Omega y_M \vec{Z}} \quad \Omega = \|\vec{\Omega}(fus/air)\| \end{aligned}$$

Par définition (b) page 3), $\vec{V}(M \in fus/air)$ est portée par \vec{X}'_a ; d'où :

$$\tan(i_m + \alpha') = \frac{\Omega y_M}{V_G} = \frac{\Omega y_M}{\sqrt{V_M^2 - \Omega^2 y_M^2}} \Rightarrow \boxed{\alpha' = \arctan \frac{\Omega y_M}{\sqrt{V_M^2 - \Omega^2 y_M^2}} - i_m}$$

B22)



$$\begin{aligned} \frac{a}{H + H'} &= \frac{b}{H'} \Rightarrow H'(a - b) = Hb \\ H + H' &= \frac{b}{a - b} H + \frac{a - b}{a - b} H = \frac{aH}{a - b} \\ \frac{a}{H + H'} &= \frac{e}{H + H' + R - y_M} \\ \frac{a}{a - b} &= \frac{e}{\cancel{a - b} + \frac{(R - y_M)(a - b)}{\cancel{a - b}}} \end{aligned}$$

$$e = \frac{a^2 H + a(R - y_M)(a - b)}{aH} = \boxed{a + \frac{(R - y_M)(a - b)}{H} = e(y_M)}$$

[2]

Vérification : $e(R) = a + \frac{(R - R)(a - b)}{H} = a$; $e(R + H) = a + \frac{(R - R - H)(a - b)}{H} = b$;

A.N. : $e = a + \frac{R(a - b)}{H} - y_M \frac{(a - b)}{H} \approx 0,082 + \frac{0,045(82 - 32)}{49} - y_M \frac{(82 - 32)}{49}$

$$\boxed{e \approx 0,13 - y_M \frac{50}{49}}$$

B23) Ne possédant pas d'évaluation de la « considération », on ne peut estimer l'ordre du développement limité à conduire pour modéliser l'hypothèse. On va se contenter d'un premier ordre !

• Effet sur les angles :

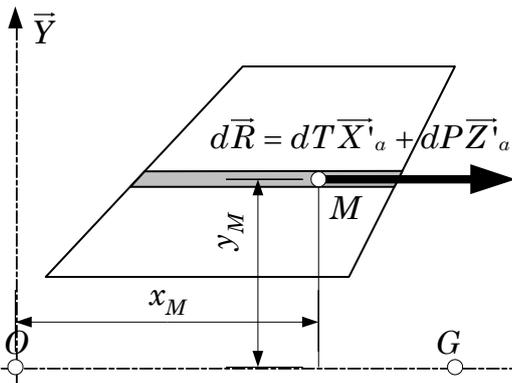
$$\left. \begin{aligned} V_G \square y_M \Omega \Rightarrow 1 \square \frac{y_M \Omega}{V_G} \\ \tan(\alpha' + i_m) = \frac{\Omega y_M}{V_G} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan(\alpha' + i_m) \square 1 \Rightarrow \tan(\alpha' + i_m) \approx \alpha' + i_m \Rightarrow \boxed{\alpha' + i_m \approx \frac{y_M \Omega}{V_G}}$$

D'où : $\cos(\alpha' + i_m) \approx 1$ et $\sin(\alpha' + i_m) \approx \alpha' + i_m$.

• Effet sur les vitesses :

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_M = V_G \vec{X} + \Omega y_M \vec{Z} \Rightarrow V_M^2 = V_G^2 + \Omega^2 y_M^2 \\ V_G \square \Omega y_M \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_M^2 \approx V_G^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{V}(M \in fus/air)\| \approx \|\vec{V}(G \in fus/air)\|}$$

Moment élémentaire.



$$\begin{aligned} \bullet d\vec{M}(G, air \rightarrow aile) \cdot \vec{X} &= [d\vec{R}(air \rightarrow aile) \wedge \vec{MG}] \cdot \vec{X} \\ &= [(dT \vec{X}'_a + dP \vec{Z}'_a) \wedge ((x_G - x_M) \vec{X} + y_M \vec{Y})] \cdot \vec{X} \\ &= \left[(y_M \vec{Y} + \underbrace{(x_G - x_M)}_0 \vec{X}) \wedge \vec{X} \right] \cdot (dT \vec{X}'_a + dP \vec{Z}'_a) \\ &= (-y_M \vec{Z}) \cdot (dT \vec{X}'_a + dP \vec{Z}'_a) \quad (\text{Cf. Figure 4}) \\ &= -y_M (dT \sin(i_m + \alpha') + dP \cos(i_m + \alpha')). \end{aligned}$$

D'où en se limitant au premier ordre :

$$d\vec{M}(G, air \rightarrow aile) \cdot \vec{X} \approx -y_M (dT(i_m + \alpha') + dP) \approx -y_M \left(dT \frac{y_M \Omega}{V_G} + dP \right).$$

Comparons l'effet des deux composantes de la parenthèse, poussé par la non donnée de la traînée par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \bullet dP &= -\frac{1}{2} \rho dSC_P V_M^2 \approx -\frac{1}{2} \rho edy_M \lambda_M \alpha' V_G^2 \approx -\frac{1}{2} \rho edy_M \lambda_M \left(\frac{\Omega y_M}{V_G} - i_m \right) V_G^2 \\ &\approx -\frac{1}{2} \rho edy_M \lambda_M V_G (\Omega y_M - i_m V_G) \end{aligned}$$

$$\bullet dT \frac{y_M \Omega}{V_G} + dP = -\frac{1}{2} \rho dSV_M^2 \underbrace{\left(\begin{array}{cc} C_T & \frac{y_M \Omega}{V_G} + C_P \\ C_T \text{ fusée} \approx 0,4 & \in [0,0,7] \\ & \text{"petit"} \end{array} \right)}_{\substack{\text{On peut penser que } C_T \text{ aileron soit} \\ \text{du meme ordre de grandeur que } C_T \\ \text{fusée, donc } C_T \text{ et } C_P \text{ sont comparables} \\ \Rightarrow C_T \frac{y_M \Omega}{V_G} \square C_P}}$$

• Bilan : on va négliger l'effet de la traînée. D'où :

$$\begin{aligned} d\vec{M}(G, air \rightarrow aile) \cdot \vec{X} &\approx -y_M dP \approx \frac{\rho \lambda_M V_G}{2} \left[e(y_M) y_M^2 dy_M \Omega - V_G e(y_M) y_M dy_M i_m \right] \\ &\approx \frac{\rho \lambda_M V_G}{2} \left[\left(0,13 - y_M \frac{50}{49} \right) y_M^2 dy_M \Omega - V_G \left(0,13 - y_M \frac{50}{49} \right) y_M dy_M i_m \right] \\ &\approx \boxed{\frac{\rho \lambda_M V_G}{2} \left[\left(0,13 y_M^2 - \frac{50}{49} y_M^3 \right) dy_M \Omega - V_G \left(0,13 y_M - \frac{50}{49} y_M^2 \right) dy_M i_m \right]} \end{aligned}$$

B24)

$$\overline{M}_G \cdot \overline{X} \approx \frac{\rho \lambda_m V_G}{2} \left[\left(0,13 \left[\frac{y_M^3}{3} \right]_R^{R+H} - \frac{50}{49} \left[\frac{y_M^4}{4} \right]_R^{R+H} \right) \Omega - V_G \left(0,13 \left[\frac{y_M^2}{2} \right]_R^{R+H} - \frac{50}{49} \left[\frac{y_M^3}{3} \right]_R^{R+H} \right) i_m \right]$$

$$\approx \left[\frac{\rho \lambda_m V_G}{2} \left[\left(0,13 \left[\frac{(R+H)^3 - R^3}{3} \right] - \frac{50}{49} \left[\frac{(R+H)^4 - R^4}{4} \right] \right) \Omega - V_G \left(0,13 \left[\frac{(R+H)^2 - R^2}{2} \right] - \frac{50}{49} \left[\frac{(R+H)^3 - R^3}{3} \right] \right) i_m \right]$$

A.N. : $\overline{M}_G \cdot \overline{X} \approx 48 \cdot 10^{-6} \Omega - 11 \cdot 10^{-3} i_m$.

B3) [2] donne avec ces nouvelles valeurs :

$$e = a + \frac{R(a-b)}{H} - y_M \frac{(a-b)}{H} \approx 0,2 + \frac{0,045(20-15)}{13} - y_M \frac{(20-15)}{13}$$

$e \approx 0,22 - \frac{5}{13} y_M$, d'où en supposant que i_f soit nul :

$$\overline{M}(G, air \rightarrow aile fixe) \cdot \overline{X} \approx \frac{\rho \lambda_f V_G}{2} \left[\left(0,22 \left[\frac{(R+H)^3 - R^3}{3} \right] - \frac{5}{13} \left[\frac{(R+H)^4 - R^4}{4} \right] \right) \Omega \right]$$

A.N. : $\overline{M}_G \cdot \overline{X} \approx 58 \cdot 10^{-5} \Omega$.

B41) Sans préjuger de leurs effets, pour l'instant, les efforts agissant sur la fusée munie de ses ailerons fixes et mobiles, dans les phases balistiques, sont les suivants :

- Poids : glisseur vertical passant par G : $m \vec{g}(t) \vec{Z}_0$;
- Action de l'air sur le corps de la fusée : glisseur passant par A : $-P(t) \vec{Z} - T(t) \vec{X}(t)$;
- Action de l'air sur le groupe d'ailerons fixes : champs de vecteur dont on connaît le moment en G porté par \vec{X} : $\overline{M}_G \cdot \vec{X}(t) \approx 58 \cdot 10^{-5} \Omega(t)$ pour **un** aileron ;
- Action de l'air sur le groupe d'ailerons mobiles : champs de vecteur dont on connaît le moment en G porté par \vec{X} : $\overline{M}_G \cdot \vec{X}(t) \approx 48 \cdot 10^{-6} \Omega(t) - 11 \cdot 10^{-3} i_m(t)$ pour **un** aileron ;

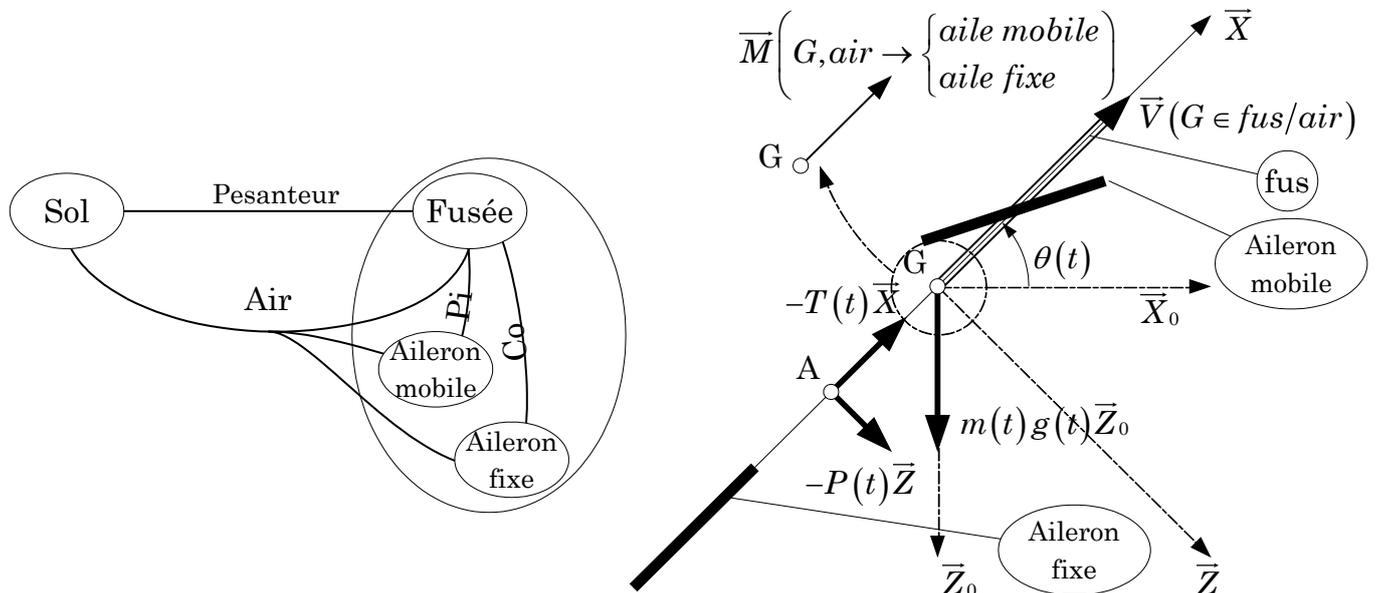


Figure 2-2 : Efforts extérieur à l'ensemble {fusée, ailerons}.

B42) Isolement de l'ensemble de la fusée et de ses ailerons. Principe fondamental de la dynamique réduit à son moment, en G , projeté sur l'axe \vec{X} :

$$\vec{\delta}(G, \{fus, a_fix, a_mob\}/sol) \cdot \vec{X} = \underbrace{\vec{M}(G, \cancel{pes} \rightarrow fus) \cdot \vec{X}}_{\vec{P} \text{ passe par } G!} + \underbrace{\vec{M}(G, \cancel{air} \rightarrow fus) \cdot \vec{X}}_{AG \square \vec{X}} + \vec{M}(G, air \rightarrow a_fix) \cdot \vec{X} + \vec{M}(G, air \rightarrow a_mob) \cdot \vec{X}$$

• On va supposer que la fusée possède **deux** ailerons de chaque catégories conformément à l'annexe3, l'annexe 8 et la figure 4 ; ce qui est moins évident sur la photo de la page 1.

• $\vec{M}(G, air \rightarrow a_mob) \cdot \vec{X} \approx 2(48 \cdot 10^{-6} \Omega - 11 \cdot 10^{-3} i_m)$;

• $\vec{M}(G, air \rightarrow a_fix) \cdot \vec{X} \approx 2(58 \cdot 10^{-5} \Omega)$;

• $\vec{\delta}_G \cdot \vec{X} \stackrel{G \text{ centre d'inertie de la fusée}}{=} \left. \frac{d\vec{\sigma}_G \cdot \vec{X}}{dt} \right)_0 - \vec{\sigma}_G \cdot \left. \frac{d\vec{X}}{dt} \right)_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}_G \cdot \vec{X}}{dt} \right)_0 + \vec{\sigma}_G \cdot \dot{\theta} \vec{Z}$;

$$\begin{aligned} \circ \vec{\sigma}_G \cdot \vec{X} &= I(G, fus) \vec{\Omega}(fus/sol) \cdot \vec{X} = \mathbf{I}(G, fus) \left[\vec{\Omega}(fus/air) + \underbrace{\vec{\Omega}(air/sol)}_{\text{Vent nul et trajectoire plane}} \right] \cdot \vec{X} \\ &= -\mathbf{I}(G, fus) \vec{\Omega}(air/fus) \cdot \vec{X} : \begin{pmatrix} I & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

À ce stade, on doit supposer que la fusée et ses ailerons possèdent une certaine symétrie qui annule les produits d'inertie E et F : les plans $y = 0$ et $z = 0$ doivent être plans de symétrie. Alors, $\vec{\sigma}_G \cdot \vec{X} \approx -I\Omega$;

• $\left. \vec{\sigma}_G \cdot \frac{d\vec{X}}{dt} \right)_0 = 0$; car G est centre d'inertie du système isolé et celui-ci possède

comme axe de révolution (discret ou continu) l'axe (G, \vec{X}) (confère paragraphe précédent) ;

• Bilan : $\vec{\delta}_G \cdot \vec{X} = -I\dot{\Omega}$. **A.N.** : $\vec{\delta}_G \cdot \vec{X} \approx -0,1 \dot{\Omega}$

• **Bilan** : $-0,1\dot{\Omega} \approx 1 \cdot 256 \cdot 10^{-6} \Omega - 22 \cdot 10^{-3} i_m \Rightarrow \boxed{1,3\Omega + 100\dot{\Omega} \approx 22i_m}$.

B43) $1,3\Omega + 100p\Omega \approx 22i_m \Rightarrow F_1 = \frac{\Omega}{i_m} \approx \frac{22}{1,3 + 100p} \Rightarrow \boxed{F_1 \approx \frac{17}{1 + 75p}}$.

B51)

• L_{2Fus} : Pivot (F, \vec{Y}) ;

• L_{Fus1} : Pivot (C, \vec{Z}) ;

• L_{1Bie} : Rotule D ;

• L_{Bie2} : Rotule E .

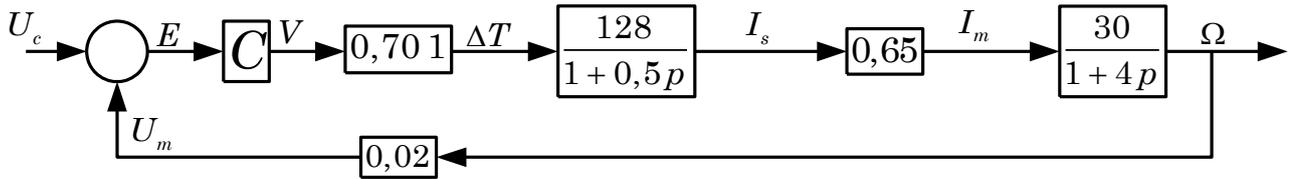
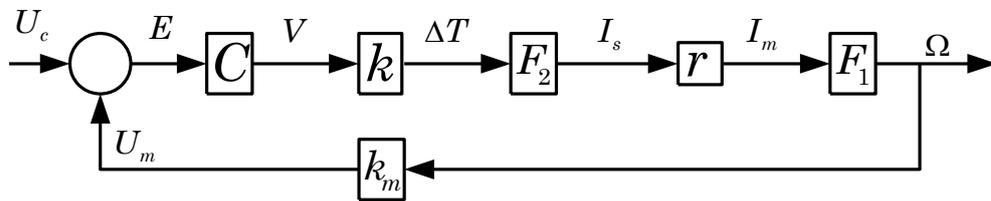


Figure 2-3 : Schéma cinématique « minimal ».

B52) $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CF} + \overline{FE} \Rightarrow DE^2 = DC^2 + CF^2 + FE^2 + 2\overline{DC} \cdot \overline{CF} + 2\overline{DC} \cdot \overline{FE} + 2\overline{CF} \cdot \overline{FE}$

- $CF^2 = L_0^2 + R_2^2 + R_1^2$;

- $2\overline{DC} \cdot \overline{CF} : 2 \begin{vmatrix} R_1 \sin i_s & L_0 \\ -R_1 \cos i_s & ? \\ 0 & ? \end{vmatrix} R_1 : 2R_1 L_0 \sin i_s - 2R_1^2 \cos i_s$;

- $2\overline{DC} \cdot \overline{FE} : 2 \begin{vmatrix} R_1 \sin i_s & -R_2 \sin i_m \\ -R_1 \cos i_s & 0 \\ 0 & ? \end{vmatrix} : -2R_1 R_2 \sin i_s \sin i_m$;

- $2\overline{CF} \cdot \overline{FE} : 2 \begin{vmatrix} L_0 & -R_2 \sin i_m \\ R_1 & 0 \\ -R_2 & +R_2 \cos i_m \end{vmatrix} : -2L_0 R_2 \sin i_m - 2R_2^2 \cos i_m$; d'où :

$$\cancel{L_0^2} = \cancel{R_1^2} + \cancel{L_0^2} + \cancel{R_2^2} + R_1^2 + R_2^2 + \cancel{2R_1 L_0 \sin i_s} - \cancel{2R_1^2 \cos i_s} - \cancel{2R_1 R_2 \sin i_s \sin i_m} - \cancel{2L_0 R_2 \sin i_m} - \cancel{2R_2^2 \cos i_m}$$

$$\boxed{R_1 \sin i_s (L_0 - R_2 \sin i_m) - R_1^2 \cos i_s = L_0 R_2 \sin i_m + R_2^2 \cos i_m - R_1^2 - R_2^2}$$

Ne possédant pas d'évaluation de la « petitesse », on ne peut estimer l'ordre du développement limité à conduire pour modéliser l'hypothèse. On va se contenter d'un premier ordre !

$$\frac{i_m}{i_s} \approx \frac{R_1}{R_2} \approx \frac{2}{3} \approx 0,6 \underbrace{R_1 i_s (L_0 - R_2 i_m)}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} - \cancel{R_1^2} \approx L_0 R_2 i_m + \cancel{R_2^2} - \cancel{R_1^2} - \cancel{R_2^2} \Rightarrow \boxed{\frac{i_m}{i_s} \approx \frac{R_1}{R_2}}$$

A.N. : $\frac{i_m}{i_s} \approx \frac{R_1}{R_2} \approx \frac{2}{3} \approx \boxed{0,6 \approx \frac{i_m}{i_s}}$.

B53)

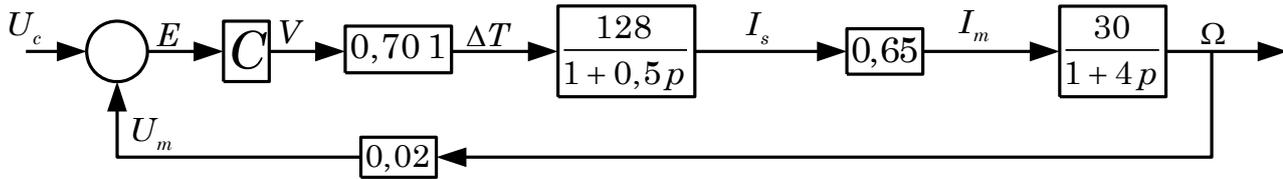
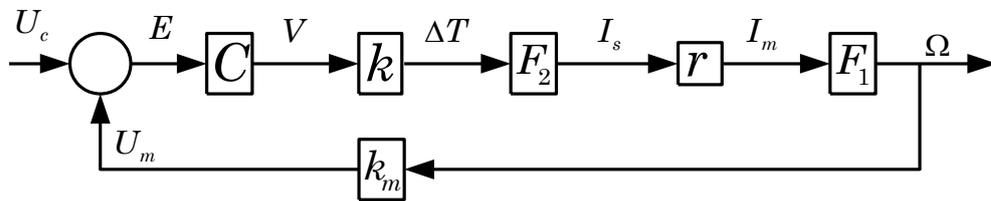


Figure 2-4 : Schémabloc.

B61) $T = \frac{35}{(1+0,5p)(1+4p)}$;

$$20\log_{10}|T(i\omega)| = 20\log_{10} 35 - 10\log_{10}(1 + 0,25\omega^2) - 10\log_{10}(1 + 16\omega^2);$$

$$\arg T(i\omega) = -\arctan(0,5\omega) - \arctan(4\omega).$$

Remarque :

- $|T(p)| = \left| \frac{35}{(1+0,5p)(1+4p)} \right|_{p \rightarrow 0} \frac{35}{1} \frac{35}{2p^2} \Big|_{p \rightarrow \infty}$;
- $\arg T(p) = \arg \frac{35}{(1+0,5p)(1+4p)} \Big|_{p \rightarrow 0} \arg \frac{35}{1} \Big|_{p \rightarrow \infty} \arg \frac{35}{2p^2}$.

Pulsation	Gain	Argument
0	31	0
0,1	30	-25
0,25	28	-52
1	18	-103
2	10	-128
4	0	-150
5	-4	-155
10	-15	-167
∞	∞	-180

Tableau 2-1 :

Les points de départ et d'arrivée des courbes sont donnés par les remarques.

Les asymptotes demandées correspondent bien (comme on pouvait s'y attendre de la part d'un système aussi classique) aux tracés des points calculés.

B62)

• Stabilité :

1. T est stable car la partie réelle de ses pôles est strictement négative ($-0,25$ et -2). La notion de marges de phase et de gain est utilisable. On constate sur la Figure 2-5 que la marge de gain est infinie et que la marge de phase vaut une vingtaine de degré. Le système est stable.
2. T est du deuxième ordre, son module statique est positif : T est stable. Le retour par un gain pur produit une fonction de transfert du système de même ordre (2) avec un module statique encore positif. Le système est stable.

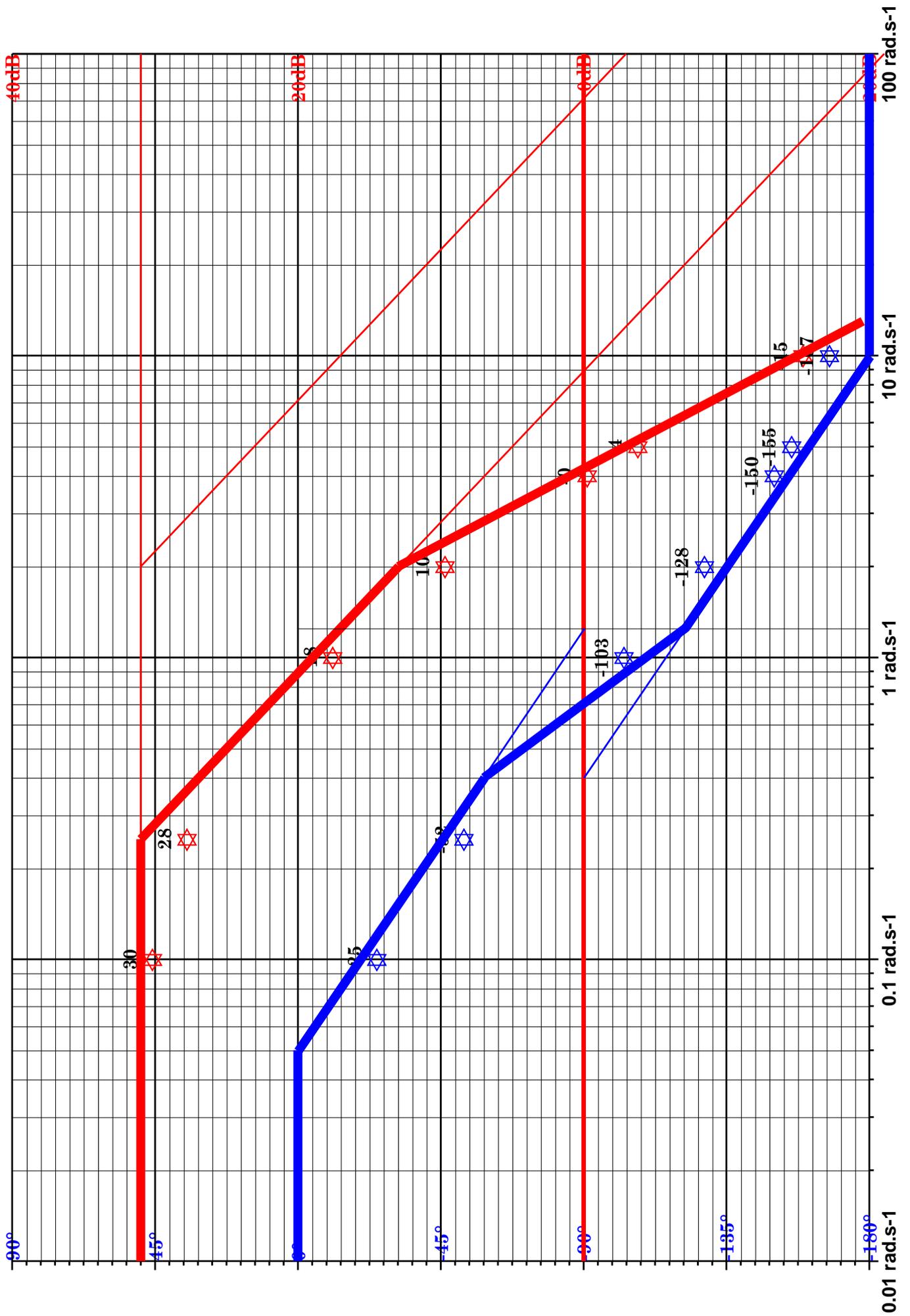


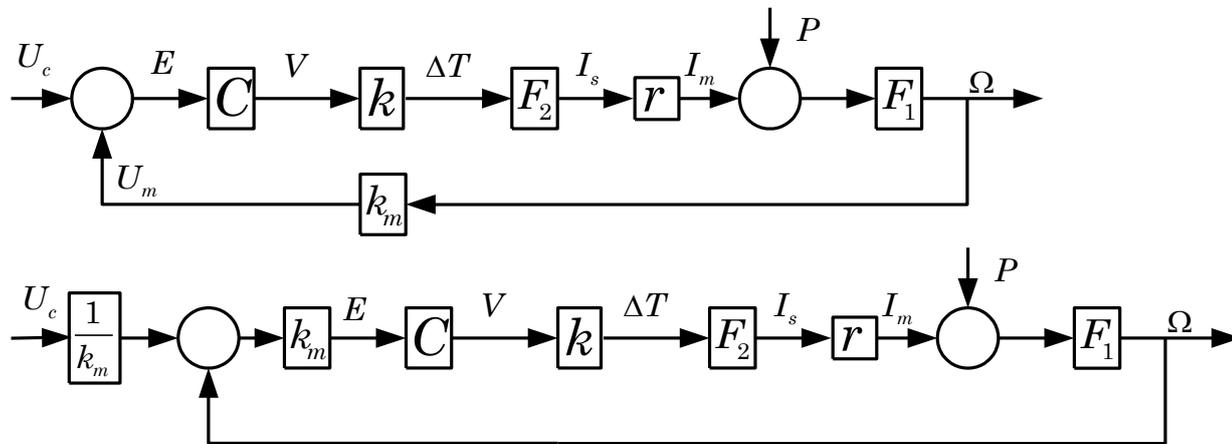
Figure 2-5 : Evolution du gain et de l'argument de T .

- **Précision** : $T = \frac{35}{(1+0,5p)(1+2p)}$; d'où :

$$H_F = \frac{T}{1+TR} = \frac{\frac{35}{\cancel{(\quad)}(\cancel{(\quad)})}}{(1+\cancel{?})(1+\cancel{?})+35 \times 0,02} \Rightarrow K_F = \frac{35}{1,7}.$$

Lorsque le système est soumis à une entrée de type échelon, l'écart statique sera borné, par contre pour une entrée de type rampe l'écart statique sera infini ($K_F \neq 1$).

B63)



On transforme le schémabloc pour le rendre à retour unitaire.

- Écart statique nul lorsque l'entrée $u_c(t)$ est de type échelon et système à retour unitaire, alors le cours indique que la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte doit au moins être égal à un. **Le correcteur doit augmenter la classe (nulle de notre fonction de transfert en boucle ouverte) de zéro à un.**
- Écart statique nul lorsque l'entrée $p(t) u_c(t)$ est de type échelon, fonction de transfert de la boucle ouverte de classe un et système à retour non unitaire ($R = k_m C k F_2 r$). Le correcteur doit rendre le retour de la boucle due à la perturbation unitaire (utilisation du théorème de superposition $\Omega = U_c H_1 + P H_2$). **Il faut que le correcteur possède un zéro et que ce zéro annihile le pôle de F_2 .** Cela ne suffit pas à rendre ce retour unitaire, mais cela le transforme en un pur module ; un petit calcul (a priori interdit par l'énoncé) pourrait rendre ce nouveau schémabloc unitaire.
- Asservissement stable, il suffit que le système reste du deuxième ordre avec un module statique positif. **Les zéros et les pôles du correcteur ne doivent pas modifier l'ordre de la fonction de transfert du système : même nombre de pôles et de zéros.**
- Bien amorti, on pourra vérifier que le coefficient d'amortissement de H_F est raisonnable ($z_F \in [0,7;1]$). A priori ?, je ne vois pas.

- **Proposition** : $C = K_C \frac{1+0,5p}{0,5p}$; d'où :

$$T = \frac{35}{\cancel{(1+0,5p)}(1+4p)} K_C \frac{\cancel{1+0,5p}}{0,5p} = \frac{70K_C}{p(1+4p)}.$$

Le module K_C servira à optimiser le couple rapidité-dépassement.

- Voici la simulation d'une entrée de type échelon ($u_{c0} = \frac{1}{0,02} = 50$) avec le système corrigé :

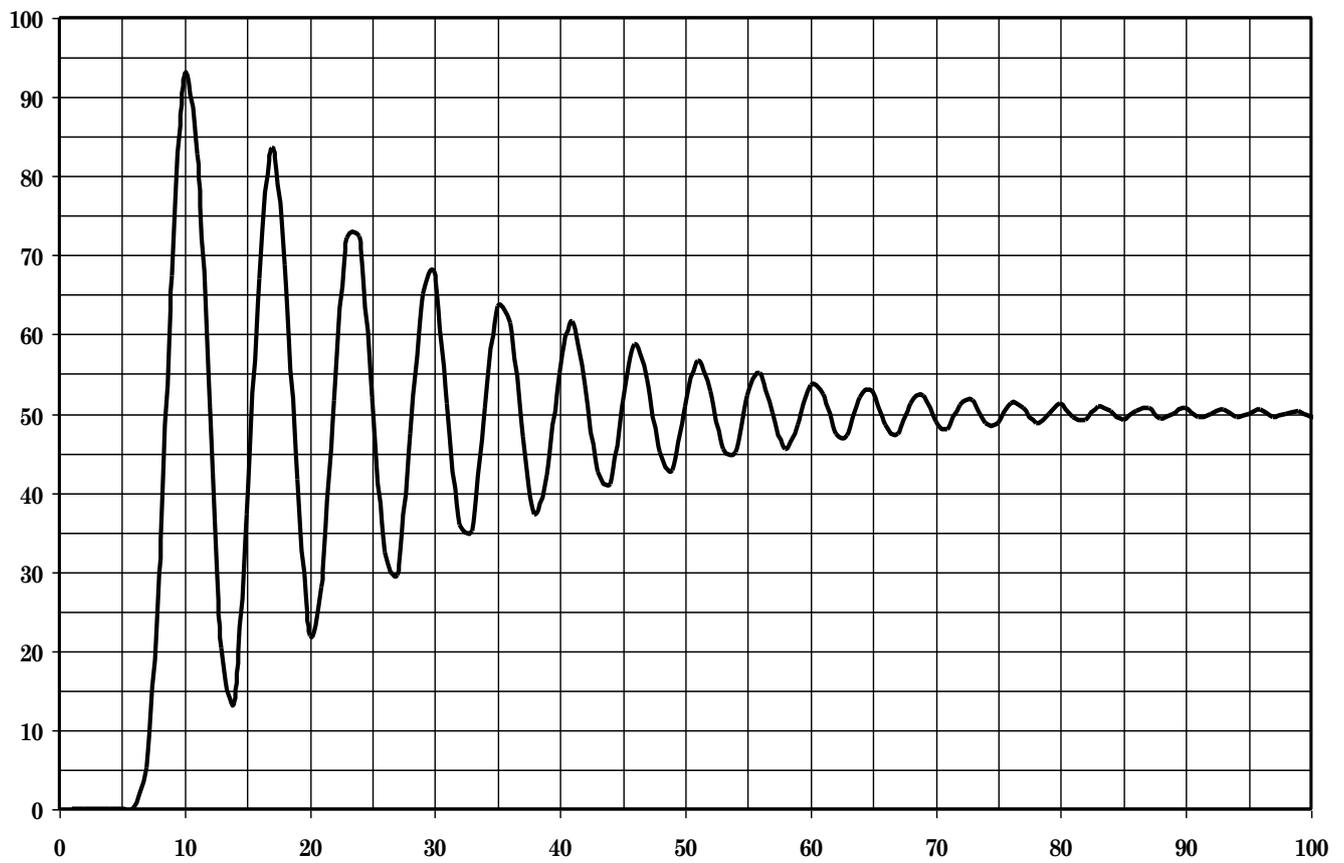


Figure 2-6 : Réponse du système à une entrée de type échelon (les valeurs de l'abscisse sont arbitraires !)

Remarque : Bien que relu, ce corrigé n'est probablement pas exempt d'erreurs de calcul, d'interprétation ou pire de compréhension !