

# Machine de découpe de miroirs

## 1. analyse de la fonction « rainurer »

### 1.1. respect de la contrainte 1

#### 1.1.1. schéma cinématique paramétré.

Document réponse 1 : schéma cinématique minimal de la machine

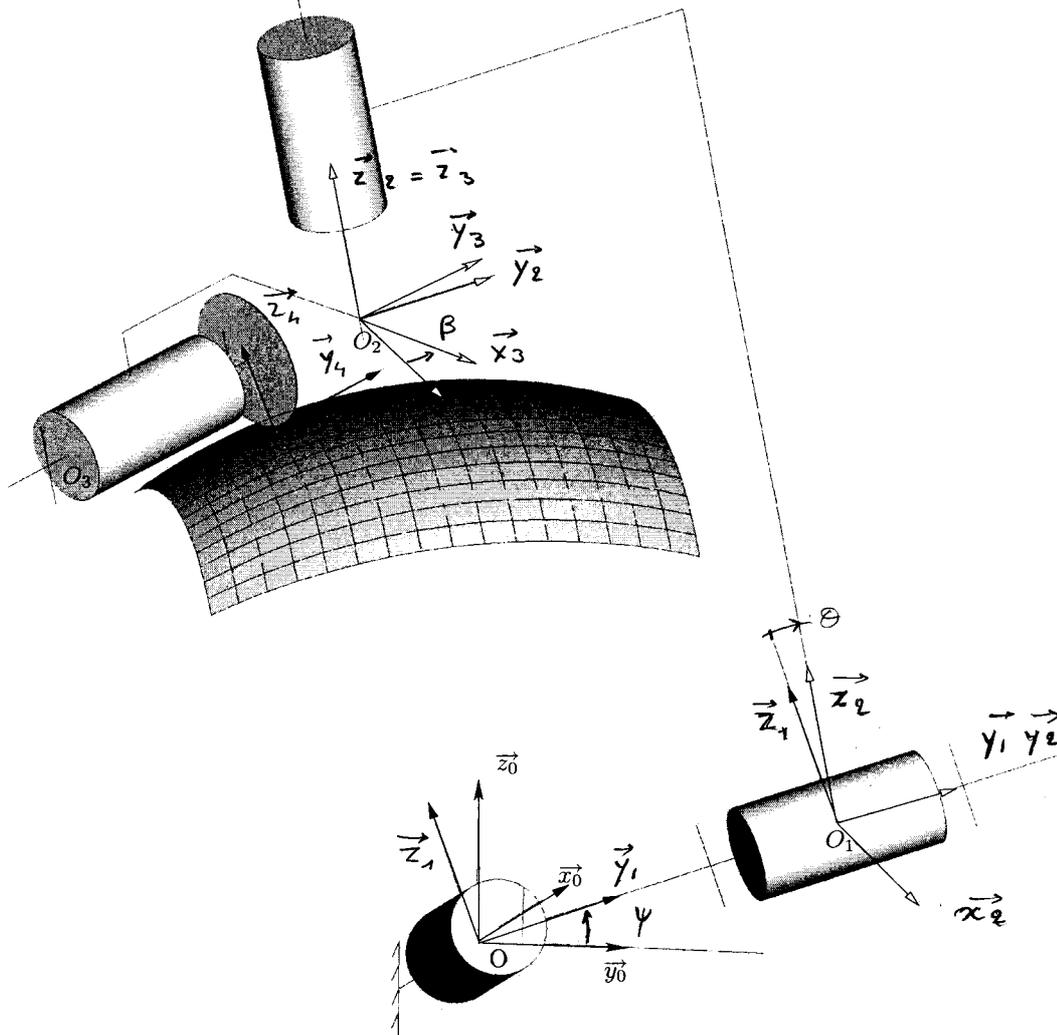


Figure 1 : schéma cinématique paramétré

#### 1.1.2. solution constructive adoptée pour le pivot :

La liaison pivot est réalisée à partir d'un ensemble galets / cintre. L'axe du pivot est défini par la normale au plan médian des pistes en V ainsi que par le centre de courbure de ces mêmes pistes.

#### 1.1.3. conditions géométriques pour le cintre :

La conception de la liaison est fortement hyperstatique. Une étude détaillée de l'implication géométrique de cet hyperstatisme semble être disproportionnée et hors de portée de nos étudiants. On proposera donc une approche plus intuitive qui s'appuiera sur la réponse précédente.

- ✓ Pour que le contact d'un galet sur le rail se fasse correctement, il faut que les formes soient complémentaires : on en déduira donc une contrainte de forme sur l'angle du vé pour chaque piste.
- ✓ Pour que l'axe du pivot soit défini sans ambiguïté il faudra par ailleurs :
  - Que les centres de courbures des deux pistes soient confondus,
  - Que les plans médians des pistes en vé soient parallèles.
- ✓ Enfin pour assurer le montage du chariot sur le rail il faudra garantir une différence de courbure pour les deux pistes (liée à l'entre-axe des galets) ainsi qu'une coïncidence des plans médians des pistes en vé.

## 1.2. Respect de la contrainte 2 :

### 1.2.1. orientation de la molette suivant la trajectoire.

L'orientation de la molette est obtenue en décalant le point de contact molette / miroir de l'axe ( $O, z_2$ ) (Cette solution s'apparente à celle utilisée pour les roues de chariot de super-marché).

### 1.2.2. critique de la solution :

L'avantage de cette solution est de s'abstraire de l'obligation d'avoir une motorisation ainsi qu'une commande pour cette orientation, l'inconvénient est que la trajectoire du point de contact  $C$  diffère de celle du point  $O$ . Cette solution nécessite donc une correction de trajectoire.

## 1.3. Respect de la contrainte 3 :

### 1.3.1. respect de l'effort presseur

Afin de compenser les défauts de forme qui induisent des variations sur la position relative du chariot par rapport au miroir, il est nécessaire de permettre à la molette de coulisser suivant la direction normale au miroir. Le vérin utilisé permet ce mouvement de même qu'il garantit l'effort presseur.

### 1.3.2. Grandeur à réguler

Il est nécessaire de réguler la pression d'alimentation qui détermine cette valeur.

### 1.3.3. Nombre de paramètres à asservir

En synthèse on peut en déduire qu'il faut piloter seulement deux paramètres **géométriques**  $\psi$  et  $\theta$ , le troisième paramètre  $\beta$  se déduisant naturellement des deux premiers. Les moteurs M1X et M2Y seulement seront pilotés.

### 1.3.4. Pilotage cartésien.

La contrainte 1 de positionnement de la molette aurait été respectée. Par contre ni les contraintes d'orientation et d'effort presseur n'auraient pu être respectées à moins de rajouter, suivant les dispositions constructives, un ou plusieurs axes pour l'orientation ainsi qu'un vérin en régulation de pression pour l'effort presseur. (il paraît impossible en effet de réguler séparément les trois axes cartésiens afin que la résultante au niveau du contact respecte le CdCf).

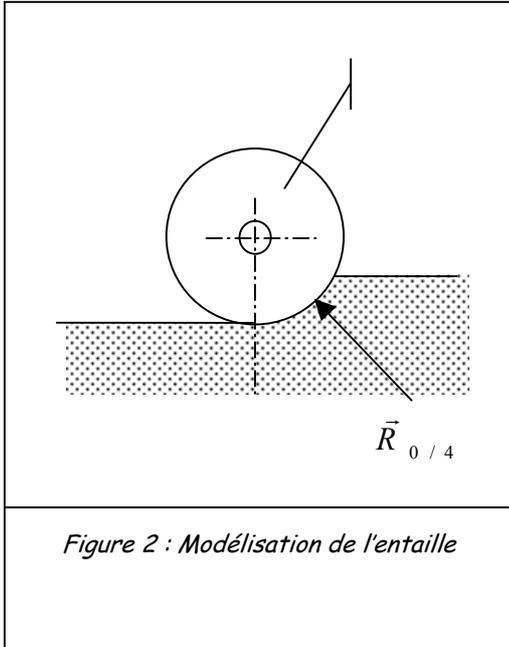
## 2. Vérification des performances.

### 2.1. Motorisation M1X :

#### 2.1.1. choix d'un moteur.

Cette question n'admet pas de réponse si l'on s'en tient au cadre strict des hypothèses :

D'un côté il est dit que la géométrie du contact est parfaite et que la molette roule sans glisser sur le miroir ( $\vec{V}_{4/0}^C = \vec{0}$ ), d'un autre il est affirmé que le contact est avec frottement et que la résultante des forces a une composante normale de 100 N et une composante tangentielle de 340N... Sachant que la molette est montée en roue « folle », l'étude des conditions d'équilibre (régime permanent) nous conduit naturellement à prouver qu'il est impossible d'avoir un effort tangentiel non nul !!! sauf à reconsidérer l'hypothèse de la géométrie du contact.



Il me semble préférable de poser l'hypothèse suivante :

la géométrie de l'entaille est celle décrite ci-contre. Si le miroir subit une déformation, la molette elle reste supposée indéformable. Quelle que soit la distribution de pression au niveau de l'entaille cela conduit à une Force passant nécessairement par  $O_3$ . On remarquera que l'angle qu'elle forme avec la normale en C au contact dépend de la profondeur d'entaille ainsi que de la distribution de pression. On peut cependant augurer que sa valeur restera faible (c'est le cas lorsque l'entaille est peu profonde et que la distribution est uniforme). Le ratio entre N et T ne sera probablement pas celui proposé (L'expérience de la découpe du verre avec un diamant nous montre empiriquement qu'il faut nettement plus « appuyer » que « tirer »...).

Ceci étant dit le problème devient résoluble. Si l'on applique le Théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble

mobile en régime permanent on peut écrire :  $P_{ext \rightarrow E}^{gal} + P_{Si \leftrightarrow Sj}^{int} = \frac{d}{dt} E_c (E / gal) = 0$

En supposant les liaisons internes parfaites, en admettant que ni le moteur MY2 ni le vérin n'interviennent, il vient :  $P_{Si \leftrightarrow Sj}^{int} = 0$ .

Côté puissances extérieures on identifie celle fournie par le moto-réducteur, celle requise pour la coupe ainsi que celle nécessaire à la levée des masses en mouvement.

Le théorème se réduit alors à l'expression :

$$\eta.C_{m1}.\omega_{m1} + \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}_{4/0} \\ \overline{V}_{4/0}^{O_3} \end{array} \right\}_{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \overline{R}_{0/4} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_3} + \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}_{E/0} \\ \overline{V}_{E/0}^G \end{array} \right\}_G \left\{ \begin{array}{c} M_E g . \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \eta.C_{m1}.\omega_{m1} + \overline{R}_{0/4} . \overline{V}_{4/0}^{O_3} + M_E g . \vec{z}_0 . \overline{V}_{E/0}^G = 0$$

Avec  $C_{m1}$  et  $\omega_{m1}$  respectivement le couple et la vitesse du moteur.

avec aussi :  $\overline{R}_{0/4} . \overline{V}_{4/0}^{O_3} = -340W$ , puisque  $\overline{V}_{4/0}^{O_3} = \overline{V}_{E/0}^{O_3} = 1.x_4$  et que  $\overline{R}_{0/4} = -340.x_4 + 100.z_4$

et avec enfin  $-M_E g . \vec{z}_0 . \overline{V}_{E/0}^G = M_E . g . \overline{OG} \dot{\psi} . \sin \psi$ , puisque  $\overline{V}_{E/0}^G = -\overline{OG} . \dot{\psi} . \vec{y}_1$ .

La résolution peut se faire en impliquant les relations de la cinématique.

Le théorème de composition des vitesses appliqué à l'ensemble permet d'écrire :

$\|\vec{V}_{4/0}^{O_3}\| = 1.m.s^{-1} = \|\vec{V}_{E/0}^{O_3}\| = \omega_{E/0} \cdot (R_s + r_m) = \dot{\psi} \cdot (R_s + r_m)$  (avec  $r_m$  rayon de la molette que l'on négligera par la suite...),

Côté réducteur on a :  $\dot{\psi} = r \cdot \omega_{m1}$  avec  $\omega_{m1}$  vitesse de rotation du moteur.

Tout ceci permet de calculer :

$$\omega_{m1} = \frac{1}{r \cdot (R_s + r_g)} \approx \frac{160}{0.425} = 376.5 \text{ rad.s}^{-1} = 3595 \text{ tr / mn} \quad (\text{en négligeant le rayon de la molette})$$

ainsi que

$$C_{m1} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{340}{\omega_{m1}} - M_E \cdot g \cdot OG \cdot r \cdot \sin \psi \right) = \frac{1}{0.7} \left( \frac{340}{376.5} - 30.9,81 \cdot 0,36 \cdot \frac{1}{160} \sin(-30^\circ) \right) = 1,76 \text{ Nm}$$

dans le cas le plus défavorable ( $\psi = 30^\circ$ ).

Comme moteur fonctionnant en zône S1 et respectant les contraintes imposées on peut retenir le moteur ayant pour référence : BLS 72 (cas limite) ou le moteur BLS 73 si l'on veut une marge de sécurité en couple.

### 2.1.2. Modèle cinétique de l'ensemble.

**Avertissement :** Les données fournies dans cette question présentent quelques contradictions.

- ✓ La première d'entre elles se situe au niveau des données géométriques et cinématiques. On précise que pendant la phase d'initialisation, le berceau part de la position basse  $\psi = -30^\circ \approx -0,5 \text{ rad}$  et se repositionne en  $\psi = 0^\circ$  (l'angle  $\theta$  n'ayant pas varié). Si par ailleurs on interprète le chronogramme fourni, on trouve que l'angle total balayé pendant cette phase est de 1 rad au lieu des 0,5 requis... ce qui est contradictoire !!!  
Pour lever cette contradiction on va revenir à la question précédente. Pour que la vitesse maxi de coupe soit de 1m/s, et en considérant que l'outil se trouve à un rayon de l'ordre de 0,4m et que les deux moteurs sont pilotés simultanément, il faut que la vitesse d'un axe soit aux environs de 1,5 rad/s.  
En conséquence, il sera donc préférable de considérer comme probable la valeur de 1 rad /s donnée pour la vitesse de rotation et de réduire l'échelle des temps d'un facteur 2. C'est ce choix là qui sera retenu pour le corrigé même si cela peut surprendre que l'outil aille plus vite pendant la phase de dégagement que lors de la coupe !
- ✓ La deuxième contradiction réside dans le fait que si E désigne l'ensemble berceau + chariot - c'est à dire sans le moto-réducteur, le modèle de la figure 6 lui inclus ce dernier. On corrigera cette contradiction en considérant que l'ensemble E se réduit au système {Cylindre + balourd} de la figure 6.

## Matrices d'inertie en O.

L'application du théorème de Huygens permet la détermination de la matrice d'inertie en O de

$$\text{l'ensemble E (berceau + chariot)} : [I(E)]_{\{O, B_1\}} = \begin{pmatrix} 1,22 & 0 & 0 \\ 0 & 2,94 & 0 \\ 0 & 0 & 1,89 \end{pmatrix}_{B_1} + M_E \overline{OG}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Pour le modèle « réduit » seule l'expression du moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation peut être exprimée :  $I'_{xx} = I_{xx} + M.d^2$

## Conditions d'équivalence des deux modèles.

Si l'on ne s'intéresse à l'équivalence des « balourds » (ici vus d'un point statique), il faut que :

$$M_E \cdot g \cdot \overline{OG} \cdot \sin \psi = M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi$$

Pour qu'il y ait identité des moments d'inertie par rapport à l'axe de rotation, il faut en plus que

$$I'_{xx} = I_{xx} + M.d^2 = 1,22 + M_E \cdot \overline{OG}^2.$$

La solution triviale de ce système est alors :  $I_{xx} = 1,22$ ,  $M = M_E$ ,  $d = \overline{OG}$ .

Le calcul donne  $I'_{xx} = I_{xx} + M.d^2 = 1,22 + 30 \cdot 0,36^2 = 5,1 \text{ kg m}^2$

### 2.1.3. Modèle dynamique complet.

L'expression de l'inertie équivalente ramenée au moteur est :  $J_{xx} = I'_{xx} \cdot r^2 + J_{mot}$ , ( sous réserve de considérer que le rendement du réducteur n'affecte pas l'expression de l'inertie équivalente ; voir article dans la revue « technologie N°116 » de Nov dec 2001 ).

Si l'on retient comme moteur le modèle BLS 72 d'inertie  $J_{mot} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ , l'inertie équivalente ramenée au moteur prend comme valeur :  $J_{xx} = I'_{xx} \cdot r^2 + J_{mot} = 5,1 \cdot \left(\frac{1}{160}\right)^2 + 5 \cdot 10^{-5} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

Lorsque le moteur est entraînant, ( ici c'est lorsque  $C_{em} > 0$  ), l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble complet ( E+ moto-réducteur ) conduit alors à la relation suivante :

$$J_{xx} \frac{\ddot{\psi}}{r} \frac{\dot{\psi}}{r} = +M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot \dot{\psi} + C_{em} \cdot \frac{\dot{\psi}}{r} - f \cdot \left(\frac{\dot{\psi}}{r}\right)^2 - (1-\eta) C_{em} \cdot \frac{\dot{\psi}}{r}$$

avec dans l'ordre, les expressions de

la dérivée de l'énergie cinétique, celles des puissances développée par le poids, fournie par le moteur, et enfin perdues dans le moto réducteur, par frottement visqueux d'une part, par frottement sec d'autre part... ( ??? )

Cette expression n'est pas coutumière. On lui préfère en général l'équation bilan suivante ramenée au moteur :

$$C_{em} \cdot \omega_m - J_{xx} \dot{\omega}_m \omega_m + M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r \cdot \omega_m - f \cdot (\omega_m)^2 - (1-\eta) C_{em} \cdot \omega_m = 0$$

Lorsque le moteur ralentit l'ensemble, la puissance entrante dans le réducteur et sur laquelle s'applique le rendement est celle qui résulte de la variation d'énergie cinétique ainsi que des effets du poids, soit :  $(-J_{xx} \dot{\omega}_m \omega_m + M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r \cdot \omega_m)$ . L'expression deviendrait alors :

$$C_{em} \cdot \omega_m - J_{xx} \dot{\omega}_m \omega_m + M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r \cdot \omega_m - f \cdot (\omega_m)^2 - (1-\eta) (-J_{xx} \dot{\omega}_m \omega_m + M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r \cdot \omega_m) = 0$$

**2.1.4. Chronogrammes**

Avertissement : Dans cette question l'échelle des temps retenue est moitié de celle indiquée (50ms/cm).

Le diagramme de vitesse du document réponse permet de calculer l'accélération angulaire. Pendant la phase d'accélération  $\dot{\psi} = \frac{\dot{\psi}(\Delta T_a)}{\Delta T_a} = \frac{1}{0,2} = 5s^{-2}$  ensuite  $\dot{\psi} = 0s^{-2}$  pendant la phase à vitesse constante, enfin  $\dot{\psi} = -5s^{-2}$  pendant le freinage.

Sachant que l'on part de la position  $\psi_0 = \psi(0) = -30^\circ \approx -0,5rad$ , les positions atteintes sont au cours du temps :

$\psi(\Delta T_a) = \psi_0 + 1/2 \cdot \dot{\psi} \cdot \Delta T_a \approx -0,4rad$  à la date  $\Delta T_a$ ,  $\psi(T_2 - \Delta T_a) \approx -0,1rad$  au début du freinage, et enfin  $\psi(T_2) = 0rad$  en fin de parcours.

Avertissement : Le calcul du couple d'accélération demandé n'a pas de sens dans la mesure où il mélange des variables vues côté moteur avec d'autres vues côté berceau. Le couple à calculer serait plutôt  $C_I(t) = J_{xx} \cdot \dot{\omega}_m(t)$ .

Pour la même raison, les autres couples seront ramenés au moteur conformément à l'expression retenue à la fin de la question précédente.

Tableau des valeurs singulières (en USI)

Date	0 <sup>+</sup>	$\Delta T_a$		$T_2 - \Delta T_a$		$T_2^-$
$\psi$	-0,5	-0,4	-0,4	-0,1	-0,1	0
$\dot{\psi}(t)$ et $\omega_m(t)$	0 et 0	1 et 160		1 et 160		0 et 0
$\ddot{\psi}(t)$ et $\dot{\omega}_m(t)$	5 et 900	5 et 900	0 et 0	0 et 0	-5 et -900	-5 et -900
$C_I(t) = J_{xx} \cdot \dot{\omega}_m(t)$	0,225	0,225	0	0	-0,225	-0,225
$C_B(t) = M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r$	-0,32	-0,26		-0,07		0
$C_{fv} = f \cdot \omega_m$	0	0,16		0,16		0
$C_{fs}$	?	?		?		?

Avertissement : Il ne me paraît pas possible dans l'immédiat de calculer le couple de frottement sec puisque ce dernier s'exprime à partir du rendement et donc de l'expression du couple moteur (voir 2.1.5...)

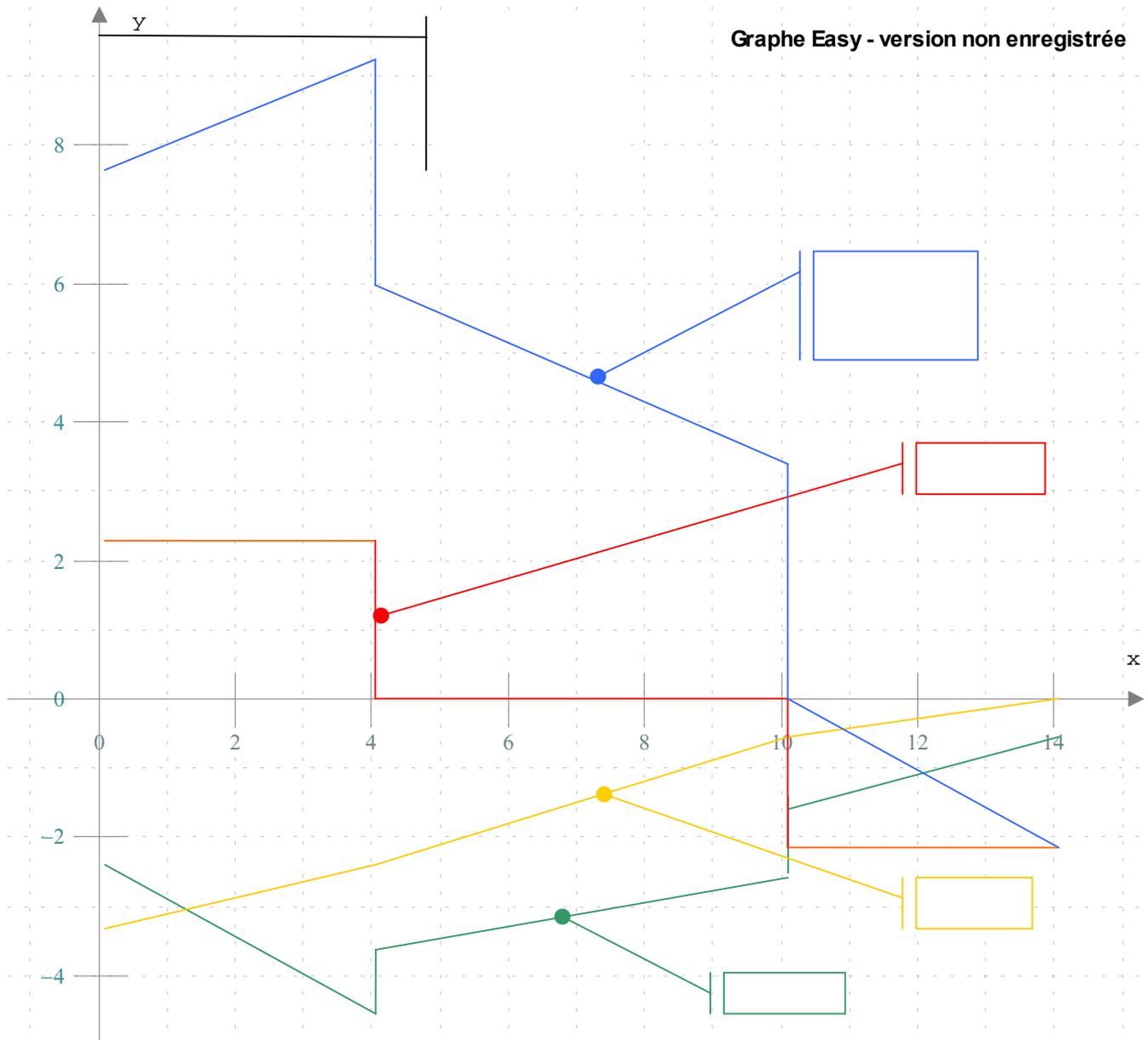
**2.1.5. Calcul du couple moteur**

La formule qui donne le couple moteur est :  $C_{em} = \frac{1}{\eta} (J_{xx} \dot{\omega}_m - M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r + f \cdot \omega_m)$  lorsque le moteur entraîne, elle devient  $C_{em} = \eta (J_{xx} \dot{\omega}_m - M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r) + f \cdot \omega_m$  dès que l'expression  $(J_{xx} \dot{\omega}_m - M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r + f \cdot \omega)$  change de signe.

De la même manière l'expression des pertes liées au rendement devient soit  $C_{fs} = -(1-\eta) \cdot |C_m|$ , soit  $C_{fs} = -(1-\eta) |J_{xx} \dot{\omega}_m - M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r|$ . Cela permet de compléter le tableau précédent

Date	$0^+$	$\Delta T_a$		$T_2 - \Delta T_a$		$T_2^-$
$(J_{xx} \dot{\omega}_m - M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r)$	0,545	0,485	0,26	0,07	- 0,155	-0,255
$(J_{xx} \dot{\omega}_m - M \cdot g \cdot d \cdot \sin \psi \cdot r + f \cdot \omega)$	0,545	0,645	0,42	0,23	0,005	-0,255
$C_{em}$	0,78	0,92	0,6	0,33	0,007	-0,225
$C_{fs}$	- 0,23	- 0,276	- 0,18	- 0,099	- 0,002	- 0,076
$C_f = C_{fs} + C_{fv}$	-0,23	- 0,44	- 0,34	- 0,259	- 0,162	- 0,076

Le chronogramme devient :



**2.2. Etude de la cadence**

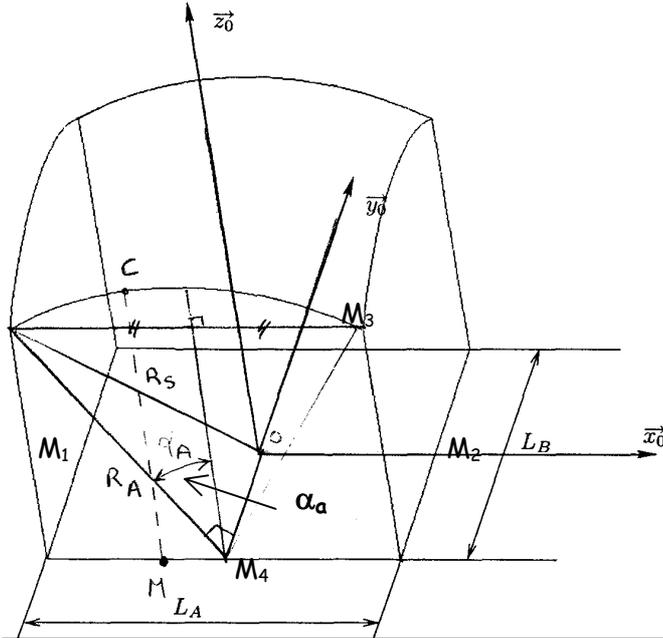


Figure 3 :modèle géométrique du profil de référence

**2.2.1. Longueur du profil projeté.**

L'intersection de la sphère avec les différents plans de projection du profil de référence donne des arcs de cercle.

La longueur totale du contour est alors :  $l = 2(2R_A \cdot \alpha_A + 2R_B \alpha_B)$

avec  $R_A = \sqrt{R_s^2 - \frac{L_B^2}{4}}$  ,  $\sin \alpha_A = \frac{L_A}{2 \cdot R_A}$  ,

(respectivement pour B).

L'application numérique donne :  $l = 1,29m$ .

**2.2.2. Temps de découpe du profil.**

En supposant constante la vitesse de coupe, T8 s'évalue à 13 seconde.

**2.2.3. Temps de production du profil**

En admettant que l'opérateur ne cherche pas à effectuer d'opération en temps masqué, la durée du cycle de coupe est de 35 secondes qui se répartissent en 2s pour effectuer et synchroniser les macros M1, M2, M3, puis 1 s pour la macro M7 suivie de 13 s pour M8, 0s pour M9, 2s pour à nouveau effectuer et synchroniser M10, M11, M12. Il faudra ensuite attendre que l'opérateur dégage le miroir, détache la coupe et positionne un nouveau miroir avant de relancer un cycle. Cette dernière séquence manuelle requière à elle seule 17s.

**2.3. Etude de la précision**

**2.3.1. Relations géométriques**

La figure proposée pour résoudre cette question me semble fautive ou éventuellement correspondre à des hypothèses que je n'ai pas vues. Si C, point de contact entre la molette et le miroir est effectivement sur la sphère et donc à la distance  $R_s$  de O,  $\overline{OC}$  en revanche n'est nullement porté par  $\vec{z}_2$  comme l'indique cette même figure. C'est  $\overline{OO_2}$  qui est porté par  $\vec{z}_2$  comme le montre la fig 17 du document réponse. L'existence du déport infirme la fig L de l'annexe.

( Je pense qu'il y a eu éventuellement confusion entre les angles  $\psi$  et  $\theta$  et les angles que j'ai désigné par  $\alpha_B$  et  $\alpha_A$ . Cette confusion semble confirmée par la fourniture du tableau 2 de la page 9).

Avertissement : Très honnêtement, et compte tenu des questions suivantes, je pense que l'auteur a voulu dissocier les sources d'erreurs en différentiant dans cette question celles liées à la cinématique de pilotage ( pour une **excentration nulle**) de celles strictement liées à l'excentration de la molette ( pour un **mouvement assimilé à un mouvement plan et circulaire** voir question 2.3.4).

Afin de pouvoir fournir des éléments de correction et pour tenir compte de la figure L de l'annexe, je serai donc amené à poser **pour cette question ainsi que pour les suivantes** l'hypothèse complémentaire suivante :

**Contrairement à ce qui est évoqué en préambule de la question, on admettra ici que l'excentration est nulle. (Hypothèse applicable jusqu'à la question 2.3.3.)**

En admettant donc que  $\overline{OC} = R_s \vec{z}_2$ , il vient :  $\overline{OC} = R_s \cdot \begin{matrix} \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{z}_2 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} = R_s \cdot \begin{matrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \cdot \sin \psi \\ \cos \theta \cdot \cos \psi \end{matrix}$ . Ainsi

$$M = R_s \cdot \begin{matrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \cdot \sin \psi \\ 0 \end{matrix}_{B_0}$$

### 2.3.2. Erreurs dues aux jeux et imperfections

En supposant que l'incertitude sur les dimensions du miroir corresponde à celle sur le profil de référence, l'erreur maximale sur chaque dimension du profil projeté est liée à l'incertitude sur la position des points extrêmes du profil (voir fig 3 du corrigé).

$$\Rightarrow \Delta d_x = \Delta x_{M1} + \Delta x_{M2} = 2 \cdot \Delta x_M, \Delta d_y = \Delta y_{M3} + \Delta y_{M4} = 2 \cdot \Delta y_M$$

Les expressions différentielles des relations précédentes donnent en tout point du contour :

$$dx_m = R_s \cdot \cos \theta \cdot d\theta \quad \text{et} \quad dy_m = -R_s \cdot [\cos \theta \cdot \cos \psi \cdot d\psi - \sin \psi \sin \theta \cdot d\theta] \approx -R_s \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot d\psi \quad \text{d'après hypothèse .}$$

Dans ce cas , et pour les points extrêmes du profil :

$$\Rightarrow \Delta x_M = R_s \cdot \cos \alpha_A \cdot \Delta \alpha_A \quad \text{puisque} \quad \alpha_A = \theta_{\max i} = \text{Arc sin} \left( \frac{L_A}{2\sqrt{R_s^2 - L_B^2/4}} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta y_M = R_s \cdot \cos \alpha_A \cdot \cos \alpha_B \cdot \Delta \alpha_B \quad \text{puisque} \quad \alpha_B = \psi_{\max i} = \text{Arc sin} \left( \frac{L_B}{2\sqrt{R_s^2 - L_A^2/4}} \right).$$

Le tableau 2 permet alors de déterminer les valeurs recherchées tableau obtenu avec Excel)

ref	LA	LB	αA	αB
1	147,6	157,5	10,18	10,68
2	425	199,8	30,96	13,60
3	270,3	160,3	18,89	10,87
4	177	159	12,24	10,78

5	257	157,5	17,92	10,68
	Maxi		30,96	13,60

Enfin, l'évaluation de l'erreur angulaire de positionnement pour chaque axe donne :

$\Delta\alpha_B = 1'$  pour l'axe M1x (l'incertitude liée au codeur étant de l'ordre de 10%)

$$\Delta\alpha_A = 20' \cdot \frac{30}{540} \approx 1' \text{ pour l'axe M2y.}$$

Cela conduit à :

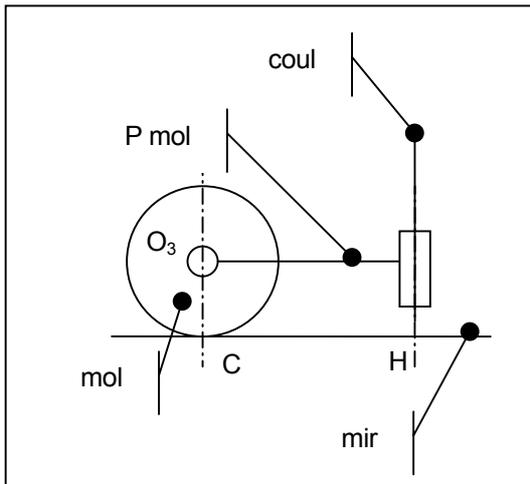
$$\Rightarrow \Delta x_M = 425 \cdot \cos 31 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}\right) = 0,105 \text{ mm d'où } \boxed{\Delta d_x = \Delta x_{M1} + \Delta x_{M2} = 0,21} \text{ mm}$$

$$\text{et } \Rightarrow \Delta y_M = 425 \cdot \cos 31 \cdot \cos 14 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}\right) = 0,1 \text{ mm d'où } \boxed{\Delta d_y = \Delta y_{M3} + \Delta y_{M4} = 0,2} \text{ mm}$$

**2.3.3. Améliorations**

???

**2.3.4. Etude cinématique : Influence de l'excentration**



L'application des contraintes géométriques imposées sur les angles permettent d'emblai d'établir la relation suivante :  $\gamma + \beta = \nu + \pi/2$  (voir fig 7 annexe M).

L'hypothèse sur la nature du mouvement du coulisseau permet par ailleurs d'écrire :  $\vec{V}_{cou/mir}^H = V \cdot \vec{u} = R_{ref} \cdot \dot{\nu} \cdot \vec{u}$ .

Sur l'autre branche de la chaîne de solides, la composition des vitesses permet d'écrire :

$$\vec{V}_{cou/mir}^C = \vec{V}_{cou/pmol}^C + \vec{V}_{pmol/mol}^C + \vec{V}_{mol/mir}^C,$$

ce qui donne, en s'appuyant sur la figure ci-contre :

$$\vec{V}_{cou/mir}^C = \vec{V}_{cou/pmol}^H + \overline{CH} \wedge \overline{\Omega}_{cou/pmol} + \vec{V}_{pmol/mol}^{O_3} + \overline{CO_3} \wedge \overline{\Omega}_{pmol/mol} + \vec{V}_{mol/mir}^C$$

En tenant compte des propriétés des mouvements, on spécifie :  $\vec{V}_{cou/mir}^C = \vec{V}_{cou/mir}^H$  (mouv de translation),  $\vec{V}_{cou/pmol}^H$  portée par  $\vec{z}_{2=3}$  et  $\overline{\Omega}_{cou/pmol} = \dot{\beta} \vec{z}_3$  (pivot glissant),  $\vec{V}_{pmol/mol}^{O_3} = \vec{0}$  et  $\overline{\Omega}_{pmol/mol}$  portée par  $\vec{y}_3$  (pivot) et enfin  $\vec{V}_{mol/mir}^C = \vec{0}$  (rsg).

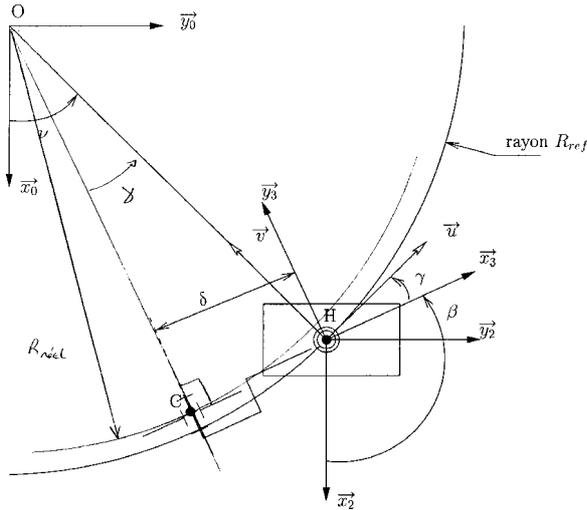
L'équation précédente en projection sur  $\vec{y}_3$  donne alors :  $V \cdot \vec{u} \cdot \vec{y}_3 = (\delta \vec{x}_3 \wedge \dot{\beta} \vec{z}_3) \cdot \vec{y}_3 \Leftrightarrow V \cdot \sin \gamma = \delta \dot{\beta}$

puis :  $\boxed{R_{ref} (\dot{\gamma} + \dot{\beta}) \cdot \sin \gamma = \delta \dot{\beta}}$

En régime permanent  $\dot{\gamma} = 0$ . L'équation différentielle donne alors :  $\boxed{\dot{\beta} (R_{ref} \cdot \sin \gamma - \delta) = 0}$  qui admet

pour solution  $\sin \gamma = \frac{\delta}{R_{ref}}$  puisqu'ici  $\dot{\beta} \neq 0$

### 2.3.5. Approximation du profil.



Pour respecter la relation précédente il faut OC perpendiculaire à CH. La trajectoire de C est donc un arc de cercle de rayon  $R_{réel} = R_{ref} \cos \gamma = 4,77 \text{ mm}$  pour l'application numérique proposée.

### 2.3.6. respect des tolérances

La part de l'erreur sur le diamètre due à la seule excentration est donc de :

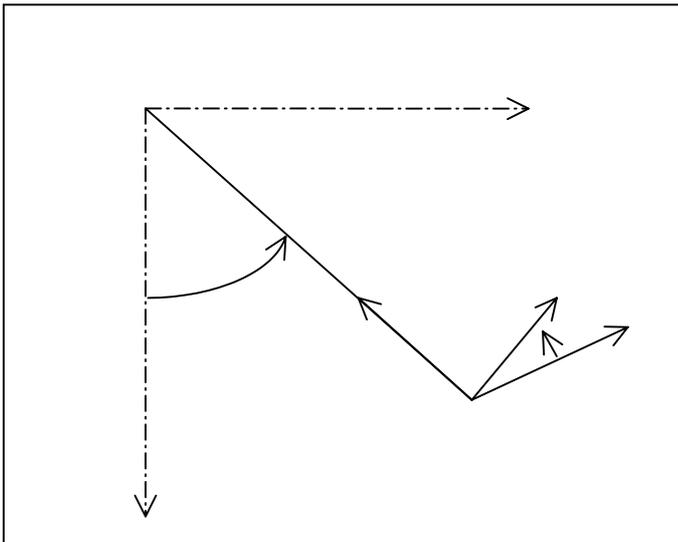
$$\Delta R = R_{ref} - R_{réel} = R_{ref} (1 - \cos \gamma) = 0.23 \text{ mm}$$

En intégrant l'erreur de positionnement due aux jeu il faut rajouter dans le pire des cas  $\sqrt{\Delta dx^2 + \Delta dy^2} = 0,145 \text{ mm}$ .

L'erreur s'approche des 0,38 mm mais reste inférieure à la tolérance acceptée, même si l'on intègre les 10% négligées dans la question 2.3.2. On trouverait alors une erreur de l'ordre 0,4 mm qui reste contenue dans la tolérance imposée.

### 2.3.7. étude en régime transitoire

Si la trajectoire n'est plus circulaire, l'équation différentielle précédente n'est plus applicable. En



effet, si  $\vec{V}_{coul/mir}^H = V \cdot \vec{u}$  reste vrai, la relation  $\vec{V}_{coul/mir}^H = R_{ref} \cdot \dot{\nu} \cdot \vec{u}$  elle ne l'est plus. Elle devient en revanche : (voir fig. ci contre)  $\vec{V}_{coul/mir}^H = R_{ref} \cdot \dot{\nu} \cdot \vec{t} - \dot{R}_{ref} \cdot \vec{v}$  en notant  $\vec{v}$  le vecteur normal à la trajectoire et  $\vec{t}$  le vecteur tangent. L'équation différentielle de la question 2.3.4. n'est plus applicable. La réponse attendue par l'auteur du sujet devient alors incertaine et à mon sens fortement sujette à interprétation...

## 2.4. Etude de l'asservissement :

### 2.4.1. Stabilité du système

En appliquant le critère de Routh au système ou plus simplement en calculant les racines du dénominateur on constate que le système est instable. Cette instabilité traduit le fait qu'autour de la position « d'équilibre instable » pour laquelle  $\psi = 0$  le poids du berceau aura tendance à entraîner l'ensemble et à le faire chuter.

### 2.4.2. Identification de la boucle de vitesse

La réponse est caractéristique d'un second ordre amorti. On mesure ainsi  $t_r 5\% = 0,74 \text{ s}$ ,  $D\% = 14\%$ ,  $t_1 = 0,51 \text{ s}$  et enfin  $\Omega(\infty) = 0,7 \text{ rad/s}$ .

De ces valeurs on en déduit grâce aux relations données en annexe :  $\zeta = 0,48$ ,  $\omega_n = 7 \text{ s}^{-1}$ ,  $K = 0,7 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ .

**2.4.3. Correction du système.**

L'asservissement de position comporte déjà un intégrateur. Sa classe est donc de 1 au minimum. On en déduira ainsi que la précision du système théorique ( sans jeux etc) est de 100%.

L'ajout d'un intégrateur, de ce point de vue là, ne semble pas justifié.

L'autre atout d'un intégrateur réside dans la réjection des perturbations. Mais puisqu'il semble que cette correction ai été déjà apportée au niveau de la boucle de vitesse, l'apport d'un intégrateur supplémentaire ne semble pas justifié.

A contrario, l'ajout d'un intégrateur rend le système moins stable...

**2.4.4. Marge de phase maxi**

Pour le diagramme de la figure 11, la marge de phase semble être quasiment nulle. Si l'on veut augmenter cette marge de phase il faut que la courbe de gain coupe l'axe à 0db lorsque la phase est maxi ( environ -135°), C'est à dire à la pulsation de 20 rad/s. On doit donc décaler la courbe de gain de 60db ce qui s'obtient en multipliant par un gain de 1000.

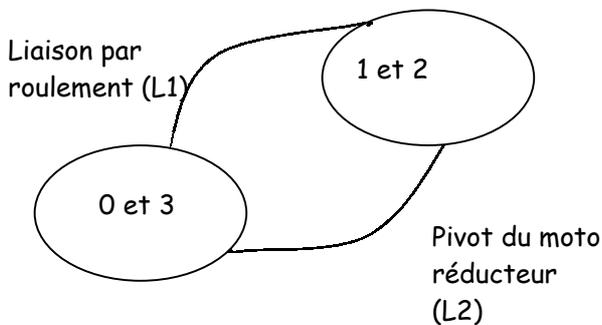
**3. Amélioration des performances.**

**3.1. Réglage du berceau**

Le réglage axial du berceau s'obtient en desserrant la frette et grâce au fait que le roulement de gauche ne comporte pas d'arrêt axial sur l'arbre. Ce réglage est nécessaire si l'on veut faire coïncider les centres des sphères côté bâti et côté berceau.

**3.2. Graphe de liaisons**

Ouvrons la boîte de Pandore...



Le graphe de liaisons est établi entre « classes d'équivalences ». Les solides 1 et 2 ainsi que 0 et 3 étant liés complètement on ne les distinguera pas.

Il s'agit donc d'étudier la liaison équivalente entre un « arbre » et son « moyeu »...

Si l'on prend pour modèle **d'analyse** pour le roulement seul (bague intérieure / bague extérieure) celui de la liaison pivot, alors le modèle retenu pour la liaison L1 est celui du

pivot glissant. Son torseur d'action est alors de la forme 
$${}_{B0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ y & M \\ z & N \end{Bmatrix}_O$$
 et le degré d'hyperstatisme

de l'ensemble sera de 4. La liaison équivalente est un pivot.

Si l'on prend pour modèle de **comportement** pour le roulement seul celui de la liaison sphérique\*, alors le modèle à retenir

pour L1 est celui de la liaison sphère / cylindre, et le torseur a cette fois pour forme 
$${}_{B0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \\ z & 0 \end{Bmatrix}_O$$
. Le degré d'hyperstatisme

pour la liaison équivalente passe à 2 ; cette liaison demeure un pivot.

Avertissement : Un modèle de **comportement** est établi en tenant compte des jeux et des défauts. De ce fait ce modèle s'écarte du cadre général des hypothèses conventionnellement admises en mécanique...

L'intérêt d'une solution hyperstatique réside dans le fait qu'elle est plus rigide. Les contraintes géométriques normalement induites par un hyperstatisme peuvent par ailleurs être compensées par de réglages. C'est en partie le cas au niveau de la liaison complète 3/0.

### 3.3. Etude mécanique

Je ne comprends pas l'objet de cette question

### 3.4. Modifications

Quand on voit les valeurs des efforts retenus en page 3 et pour la question 2.1.1 ainsi que pour le poids du berceau (respectivement 100, 340 et 300 N) je doute du bien fondé de cette question. (A moins qu'il n'y ait une information qui m'ait échappée)