

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES
PILOTE DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures

Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 7 pages de texte, numérotées de 1 à 7.

CALCULATRICE AUTORISEE

**Questions liées : 1 à 14
15 à 19
et 20 à 30**

PARTIE I

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur \mathbb{R} et E_1 l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} , sous espace vectoriel de E . Soit φ une fonction continue sur \mathbb{R} . A toute fonction f appartenant à E_1 on associe la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t)dt$$

On définit ainsi une application L_φ de E_1 dans E $L_\varphi : f \rightarrow g$

Question 1 : φ étant donnée, pour que g appartienne à $\text{Im}L_\varphi$, la fonction g doit vérifier, dans le cas où φ ne s'annule pas

- a) g continue b) $\frac{g'}{\varphi} \in E_1$
 dans le cas où φ s'annule
 c) $g = 0$ d) g' s'annule aux zéros de φ et $\frac{g'}{\varphi}$ est prolongeable par continuité en ces points.

Question 2 : Dans le cas où $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ et $g(x) = e^x - x - 1$ la fonction g

- a) ne vérifie pas les conditions nécessaires de la question 1
 b) vérifie les conditions nécessaires de la question 1
 et dans le cas où $\varphi(x) = \ln(1 + x + x^2)$ et $g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ la fonction g

- c) vérifie les conditions nécessaires de la question 1
 d) ne vérifie pas les conditions nécessaires de la question 1

Question 3 : La fonction φ étant fixée, la fonction f est reliée à la fonction g par :

a) $f = \frac{g}{\varphi}$ b) $f(x) = \frac{g(x)}{\int_0^x \varphi(t)dt} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ c) $f = \frac{g'}{\varphi}$

d) $f(x) = \frac{g'(x) \int_0^x \varphi(t)dt - g(x)\varphi(x)}{(\int_0^x \varphi(t)dt)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On considère le cas particulier où les fonctions φ et g sont définies respectivement par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \ln(1 + x + x^2) \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

et on note f la fonction de E_1 telle que $g = L_\varphi(f)$, si elle existe.

Question 4 : La fonction f

- a) n'est pas prolongeable par continuité en 0
- b) est prolongeable par continuité en 0 par 1
- c) est prolongeable par continuité en 0 par 0
- d) est prolongeable par continuité en 0 par -1

Question 5 : Le graphe de la fonction f , dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport

- a) au point $(1, f(1))$
- b) au point $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$
- c) à la droite $x = 1$
- d) à la droite $x = \frac{1}{2}$

Question 6 : Sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ la fonction f est :

- a) croissante puis décroissante
- b) décroissante
- c) croissante
- d) monotone

Question 7 : La limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$

- a) n'existe pas et la courbe admet
- b) vaut zéro
- c) une asymptote
- d) une branche infinie parabolique.

Question 8 : L'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point $(0, f(0))$ s'écrit

- a) $y = 1 - \frac{x}{2}$
- b) $y = 1 + x$
- c) $y = 1 + \frac{x}{2}$
- d) $y = x$

On revient au cas général où φ est une fonction fixée continue sur \mathbb{R} .

On note Φ la primitive de la fonction φ s'annulant en $x = 0$

Question 9 : Les fonctions f et g vérifient $g = L_\varphi(f)$ et $g-f = \Phi$

- a) $\begin{cases} f(x) = 1 + 2e^{\varphi(x)} \\ g(x) = \Phi(x) + 1 + 2e^{\varphi(x)} \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$
- b) $\begin{cases} f(x) = 1 - e^{\varphi(x)} \\ g(x) = 1 - e^{\varphi(x)} + \Phi(x) \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$
- c) $\begin{cases} f(x) = 1 + \ln|\Phi(x)| \\ g(x) = \Phi(x) + 1 + \ln|\Phi(x)| \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$
- d) $\begin{cases} f(x) = 1 + \Phi(x) \\ g(x) = 2\Phi(x) + 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

Dans toute la suite de cette partie, la fonction φ considérée sera définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \varphi(x) = e^x.$$

On considère l'espace vectoriel E_3 , sous-espace vectoriel de E_1 , constitué des fonctions f telles que $f(x) = a \cos x + b \sin x$ où a et b sont des réels quelconques.

Question 10 : La famille de fonctions suivantes forme une base de l'espace $L_\varphi(E_3)$

$$\text{a) } \begin{cases} g_1(x) = \cos x \\ g_2(x) = \sin x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{b) } \begin{cases} v_1(x) = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{1}{2} \\ v_2(x) = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \begin{cases} w_1(x) = 1 \\ w_2(x) = e^x \sin x \\ w_3(x) = e^x \cos x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{d) } \begin{cases} u_1(x) = e^x \cos x - 1 \\ u_2(x) = e^x \sin x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$$

Question 11 : Reprenant les notations de la question 10 et l'espace vectoriel E_3 étant rapporté

à la base (f_1, f_2) avec $f_1(x) = \cos x$ et $f_2(x) = \sin x$, la matrice $\begin{pmatrix} C & -C \\ C & C \end{pmatrix}$, où C est une constante

donnée, représente matriciellement la restriction de L_φ à l'espace E_3 lorsque $L_\varphi(E_3)$ est rapporté à la base :

$$\text{a) } (g_1, g_2) \quad \text{b) } (v_1, v_2) \quad \text{c) } (u_1, u_2) \quad \text{d) } (w_1, w_2, w_3)$$

n étant un entier donné, on désigne par \mathcal{P}_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On considère les fonctions $u_0(x) = e^x - 1$, $u_1(x) = xe^x$, ..., $u_n(x) = x^n e^x$

Question 12 : Pour p entier naturel, la fonction g_p image par L_φ de la fonction $f_p(x) = x^p$ vérifie :

$$\text{a) } g_0 = -u_0 \quad \text{b) } g_0 = u_0 \quad \text{c) } g_p = -u_p \quad \text{d) } g_p = u_p - p g_{p-1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Question 13 : Pour $p \in \mathbb{N}$ la fonction g_p définie à la question 12 s'écrit, A_p^{p-k} désignant le nombre d'arrangements de $(p-k)$ éléments parmi p éléments :

$$\text{a) } g_p = u_p - u_{p-1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \text{b) } g_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} A_p^{p-k} u_k + (-1)^p$$

$$\text{c) } g_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} A_p^{p-k} u_k \quad \text{d) } g_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} p! u_k + (-1)^p$$

Question 14 : La matrice de la restriction de l'application L_φ à \mathcal{P}_n par rapport à la base canonique de \mathcal{P}_n et à la base (u_0, \dots, u_n) de $L_\varphi(\mathcal{P}_n)$ est

- a) carrée d'ordre $(n+1)$ et diagonale
- b) triangulaire supérieure et carrée d'ordre n
- c) inversible car de déterminant égal à $(-1)^{n+1}$
- d) de déterminant égal à 1 donc de rang n .

PARTIE II

Soit P le polynôme à coefficients réels à une indéterminée X défini par

$$P = 26 - 34X + 23X^2 - 6X^3 + X^4$$

Question 15 : Le système d'équation : $\begin{cases} -4x^4 + 12x^3 - 34x + 26 = 0 \\ -12x^3 + 46x^2 - 34x = 0 \end{cases}$ a pour solution :

- a) $x = \frac{17}{6}$
- b) $x = 2$
- c) $x = 0$
- d) $x = 1$

Question 16 : Le nombre complexe z_1 est racine du polynôme P :

- a) $z_1 = \frac{17}{6}(1 + i)$
- b) $z_1 = 1 - i$
- c) $z_1 = 2(1 + i)$
- d) $z_1 = \frac{17}{6}(1 - i)$

Question 17 : Le polynôme P est divisible par le polynôme Q défini par :

- a) $Q = 13 - 2X + X^2$
- b) $Q = 13 - \frac{17}{3}X + X^2$
- c) $Q = 13 - 4X + X^2$
- d) $Q = \frac{189}{18} - \frac{17}{3}X + X^2$

Question 18 : La fraction rationnelle $\frac{1}{P(x)}$ se décompose en éléments simples sur le corps des réels sous la forme :

- a) $\frac{1}{85} \left(\frac{2x + \frac{7}{36}}{x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{189}{18}} - \frac{x - \frac{5}{18}}{x^2 - 4x + \frac{368}{189}} \right)$
- b) $\frac{1}{85} \left(\frac{2x + 7}{x^2 - 2x + 2} - \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 13} \right)$
- c) $\frac{1}{36} \left(\frac{3x + 2}{x^2 - \frac{17}{3}x + 13} + \frac{3}{(x - 4)^2} - \frac{1}{x - 4} \right)$
- d) $\frac{1}{85} \left(\frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 2} - \frac{2x + 7}{x^2 - 4x + 13} \right)$

Question 19 : A étant un réel positif fixé, l'intégrale $I = \int_0^A \frac{1}{P(x)} dx$ vaut :

- a) $I = \frac{1}{85} \left[\ln \left(\frac{A^2 - \frac{17}{3}A + \frac{189}{18}}{A^2 - 4A + \frac{368}{189}} \right) + \frac{3}{18} \operatorname{Arctan} \left(A - \frac{17}{6} \right) - \frac{5}{9} \right]$
- b) $I = \frac{1}{36} \left[\ln \left(\frac{\left(A^2 - \frac{17}{3}A + 13 \right)^{\frac{3}{2}}}{A - 4} \right) + 2 \operatorname{Arctan} \left(A - \frac{17}{6} \right) - \frac{3}{A - 4} \right]$
- c) $I = \frac{1}{85} \left[\ln \left(\frac{A^2 - 4A + 13}{A^2 - 2A + 2} \right) - 9 \operatorname{Arctan}(A - 1) + \frac{7}{13} \operatorname{Arctan} \frac{A - 2}{3} - \frac{9\pi}{4} + \frac{7}{13} \operatorname{Arctan} \frac{2}{3} + \ln \frac{2}{13} \right]$
- d) $I = \frac{1}{85} \left[\ln \left(\frac{A^2 - 2A + 2}{A^2 - 4A + 13} \right) + 9 \operatorname{Arctan}(A - 1) - \frac{7}{3} \operatorname{Arctan} \frac{A - 2}{3} + \frac{9\pi}{4} - \frac{7}{3} \operatorname{Arctan} \frac{2}{3} - \ln \frac{2}{13} \right]$

PARTIE III

Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(0) = 0$; $f(1) = -1$; $f(-1) = 1$
 et $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ $f(t) = \frac{2t}{1 - t^2} \ln |t|$

Question 20 : La courbe représentant f dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ est symétrique par rapport :

- a) au point $(0, 0)$ car f est paire
 b) au point $(1, -1)$
 c) à la droite $x = 0$ car f est impaire
 d) à la droite $y = 0$

Question 21 : La fonction f

- a) est continue sur \mathbb{R} car une fonction définie en tout point de \mathbb{R} est continue sur \mathbb{R}
 b) n'est pas continue en 0 car \ln n'est pas définie en 0
 c) est continue sur \mathbb{R}
 d) est continue sur $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Question 22 : La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$

- a) n'existe pas b) est nulle c) est égale à $-\infty$ d) est égale à $+\infty$

Question 23 : Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire $f\left(\frac{1}{t}\right)$ sous la forme

- a) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{f(t)}$ b) $f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t)$ c) $f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)$ d) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)} \ln \left| \frac{1}{t} \right|$

Question 24 : La limite lorsque t tend vers 0, de la fonction $\frac{1}{t}f(t)$

- a) est nulle et la courbe est tangente à l'axe $x'Ox$ au point $(0, 0)$
- b) est égale à $+\infty$
- c) est égale à $-\infty$
- d) n'existe pas

Question 25 : Le développement limité à l'ordre n , $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction $t \mapsto t \ln t$ au voisinage de 1 s'écrit, la fonction $\varepsilon(t)$ tendant vers 0 lorsque t tend vers 1

- a) $t(t-1) - \frac{t(t-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t(t-1)^n}{n} + (t-1)^n \varepsilon(t)$
- b) $t^2 - \frac{t^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n-1} + t^n \varepsilon(t)$
- c) $t(t-1) + \frac{t(t-1)^2}{2} + \dots + \frac{t(t-1)^n}{n} + (t-1)^n \varepsilon(t)$
- d) $(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{(t-1)^n}{n(n-1)} + (t-1)^n \varepsilon(t)$

Question 26 : Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction $\frac{f(t) + 1}{t - 1}$ est

- a) $1 + \frac{t}{6} - t^2$
- b) $t + t^2$
- c) $\frac{t-1}{6} - \frac{(t-1)^2}{6} + (t-1)^2 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 1} \varepsilon(t) = 0$
- d) $\frac{t-1}{6} + (t-1)^2$

Question 27 : La fonction f est

- a) dérivable sur \mathbb{R}^*
- b) dérivable sur \mathbb{R} car continue sur tout point de \mathbb{R} et a pour dérivée si elle existe
- c) $f(t) = \frac{2t(1+t^2)}{|t|(1-t^2)} \ln|t| + \frac{2}{1-t^2}$ pour $t \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ et $f(1) = 0 = -f(-1)$
- d) $f(t) = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \left[\ln|t| + \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} \right]$ pour $t \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}$ et $f(1) = 0 = f(-1)$

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\varphi(t) = \ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Question 28 : On a

- a) $\varphi'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}_+^*$
- b) $\varphi'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $\varphi'(1) = 0$
- c) φ est croissante puis décroissante sur \mathbb{R}_+^*
- d) φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

Question 29 : La fonction f est

- a) positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$ car il en est de même de φ
- b) négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$ car de même signe que φ et la fonction f est
- c) négative sur \mathbb{R}
- d) négative ou nulle sur \mathbb{R}_+^* et positive ou nulle sur $] -\infty, 0[$

Question 30 : Soit g la fonction de la variable réelle définie par $g(x) = \tan(2x) \ln|\tan x|$. On a

- a) g est définie sur $\mathbb{R} - \left\{k \frac{\pi}{4}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$; paire et π -périodique
- b) g est définie sur $\mathbb{R} - \left\{(2k+1) \frac{\pi}{4}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$; impaire et 2π -périodique
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ car $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0$
- d) g est prolongeable par continuité sur \mathbb{R}