Question liées : 1 à 18 ; 19 à 22 ; 23 à 29 ; 30 à 32

- PARTIE I -

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :
$f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ k_n & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

où k_n est un réel fixé et ln désigne la fonction logarithme népérien. On notera C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé. n désignera un entier naturel dans cette partie.

Question 1 : Le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit, ε désignant une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

a) $1 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ b) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

c) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ d) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

Question 2 : Le développement limité de la fonction $\dfrac{1}{2+u}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit, ε désignant toujours une fonction telle que $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$

a) $1 - \dfrac{u}{2} + \dfrac{u^2}{4} + u^2\varepsilon(u)$ b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{u}{4} + \dfrac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$

c) $-\dfrac{u}{4} + \dfrac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$ d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{u}{4} + u^2\varepsilon(u)$

Question 3 : Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f_0 au voisinage de 1 est alors, ε_0 étant une fonction *vérifiant* $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon_0(x) = 0$

a) $1 - \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_0(x)$

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_0(x)$

c) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2x-1}{4} + \dfrac{10x^2-9x+3}{24} + x^2\varepsilon_0(x)$

d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{12}x^2 + x^2\varepsilon_0(x)$

Question 4 : Pour tout entier n strictement positif, on a

a) $f_n(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ b) $f_n(x) = x^n f_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

et le développement limité à l'ordre 2 de la fonction x^n au voisinage de 1 s'écrit, ε désignant une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon(x) = 0$

c) $1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

d) $1 + n(x-1) + \dfrac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$

Question 5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction f_n est alors, avec $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon_n(x) = 0$

a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{n-1}{2}(x-1) + \dfrac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)$

b) $1 + \dfrac{n-1}{2}(x-1) + \dfrac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)$

c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{n-1}{2}(x-1) + \dfrac{3n^2+9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)$

d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{n-1}{2}x+\dfrac{3n^2-9n+5}{12}x^2+x^2\varepsilon_n(x)$

Question 6 : Pour que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$ il faut poser :

a) $k_n=1$ b) $k_n=\dfrac{n}{2}$ c) $k_n=\dfrac{1}{2}$ d) $k_n=-\dfrac{1}{2}$

On suppose dorénavant que k_n prend une valeur rendant f_n continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour n entier naturel fixé.

Question 7 : Pour tout entier n, la fonction f_n

a) n'est pas dérivable en 1

b) est dérivable en 1 car toute fonction continue en un point x_0 est dérivable en x_0

c) est dérivable en 1 puisque f_n admet un développement limité d'ordre 1 en 1

d) est dérivable en 1 et a pour dérivée $f_n'(1)=\dfrac{n-1}{2}$, car toute fonction admettant un développement limité d'ordre n en un point x_0 a une dérivée d'ordre n en x_0, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Question 8 : L'équation de la tangente à C_n au point de coordonnées $(1,k_n)$ s'écrit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y=h_n(x)$ avec pour tout $x\in\mathbb{R}$

a) $h_n(x)=-\dfrac{n-1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}$ b) $h_n(x)=\dfrac{n-1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}$

c) $h_n(x)=\dfrac{n-1}{2}x-\dfrac{n}{2}+1$ d) $h_n(x)=\dfrac{n-1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

Question 9 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n-h_n est au voisinage de 1 du signe de $Q(n)$ où Q est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

a) $Q(x)=3x^2-9x+5$ b) $Q(x)=3x^3+9x+5$

c) $Q(x)=-3x^2+9x-5$ d) $Q(x)=\dfrac{5}{12}$

Question 10 : La fonction polynôme Q

a) n'admet pas de racines réelles

b) admet nécessairement des racines réelles puisqu'elle est à coefficients réels

c) admet 2 racines réelles positives $x_1=\dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$ et $x_2=\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$

d) admet 2 racines réelles négatives $x_1=\dfrac{-9-\sqrt{21}}{6}$ et $x_2=\dfrac{-9+\sqrt{21}}{6}$

Question 11 : Au voisinage du point d'abscisse 1, la courbe C_n reste :

a) pour tout $n\in\mathbb{N}$, au dessus de sa tangente car $Q(n)>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

b) pour tout $n\in\mathbb{N}$, au dessous de sa tangente car $Q(n)<0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

c) pour tout entier $n\geqslant 2$ au dessus de sa tangente et au dessous pour $n\leqslant 1$

d) pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ au dessus de sa tangente et au-dessous pour $n\in\{1,2\}$

Question 12 : On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$:

a) $f_0'(x)=\dfrac{x^2-1-2x^2\ln x}{x(x^2-1)^2}$ b) $f_0'(x)=\dfrac{1}{2x^2}$

et pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) $f_n'(x)=x^{n-2}\,(n\ln x+1)$

d) $f_n'(x)=\dfrac{x^{n+1}\,(1+(n-2)\ln x)-x^{n-1}\,(1+n\ln x)}{(x^2-1)^2}$

Question 13 : La fonction f_n :

a) est prolongeable par continuité en 0 par 0 pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0$

b) est prolongeable par continuité en 0 uniquement pour n entier strictement positif

c) n'est prolongeable par continuité en 0 pour aucune valeur de l'entier n

d) est prolongeable par continuité en 0 uniquement pour $n \geqslant 2$

Question 14 : La fonction $t_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$, lorsqu'elle est définie, a pour limiute à droite en 0 :

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} t_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} t_1(x) = +\infty$

et la courbe C_n admet

c) une demi-tangente horizontale en $(0,0)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

d) une demi-tangente horizontale en $(0,0)$ pour $n \geqslant 2$ et une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 pour $n \in \{0,1\}$

On considère les fonctions φ_0, φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi_0(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\ln x$$
$$\varphi_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x$$
$$\varphi_2(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$$

Question 15 : La fonction φ_0

a) a pour dérivée la fonction $\varphi_0'(x) = -\dfrac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

b) a pour dérivée la fonction $\varphi_0'(x) = \dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^3}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

c) atteint son maximum au point $x = 1$

d) atteint son minimum au point $x = 1$

Question 16 : La fonction f_0

a) est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas strictement décroissante

b) est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_0'(x) = \dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\varphi_0(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f_0'(1) = -\dfrac{1}{2}$

c) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

et la courbe C_0 admet

d) les droites $x = 0$ et $y = 0$ pour asymptotes car $\lim\limits_{x \to 0} f_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = +\infty$

Question 17 : On a :

a) $\varphi_1'(x) = \dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_1(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_2(x) = +\infty$

d) $\varphi_2(x) \leqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Question 18 : La fonction f_1 prolongée à $\mathbb{R}_+^*$, si cela est possible,

a) est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

b) est positive sur $\mathbb{R}_+$ car croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0

et la droite Oy est

c) direction asymptotique de la courbe C_2

d) asymptote à la courbe C_1

- PARTIE II -

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $((b+c)x + (c-a)y + (b-a)z, (c-b)x + (a+c)y + (a-b)z, (b-c)x + (a-c)y + (a+b)z)$ où a, b, c sont des réels distincts 2 à 2.

Question 19 : La matrice A de f par rapport à la base B s'écrit :

a) $A = \begin{pmatrix} (b+c) & (c-b) & (b-c) \\ (c-a) & (a+c) & (a-c) \\ (b-a) & (a-b) & (a+b) \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} (b+c) & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (a+c) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (a+b) \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} (2b+2c-2a) & 0 & 0 \\ 0 & (2a+2c-2b) & 0 \\ 0 & 0 & (2a+2b-2c) \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} (b-a) & (c-a) & (b+c) \\ (a-b) & (a+c) & (c-b) \\ (a+b) & (a-c) & (b-c) \end{pmatrix}$

Question 20 : Pour tout λ réel la matrice $A - \lambda I$ a pour déterminant Δ

a) $\Delta = (2c-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & (c-b) & (b-c) \\ 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix}$

b) $\Delta = (2c-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 1 & (a+c-\lambda) & (a-c) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix}$

c) $\Delta = (2a-\lambda)(2c-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (c-b) & (2b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\Delta = \lambda^3 - \lambda^2(2a+2b+2c) + \lambda(4ab+4ac+4bc) - 8abc$

Question 21 : La matrice A

a) est égale à sa transposée pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

b) est inversible pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

c) n'est pas inversible car son déterminant est nul $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

d) est inversible si et seulement si a et b sont non nuls

Question 22 : Le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

a) est de degré 2 b) admet 0 pour racine car $\det A = 0$

c) est égal à $(2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)$ d) est égal à $(\lambda-2a)(\lambda-2b)(\lambda-2c)$

- PARTIE III -

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels.
On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$
On désigne par $\inf\limits_{n \geqslant p} x_n$ (resp. $\sup\limits_{n \geqslant p} x_n$) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{x_n \mid n \geqslant p\}$.

Question 23 : La suite de terme général $\inf\limits_{n \geqslant p} x_n$, $n \in \mathbb{N}$, est

a) convergente car décroissante et minorée

b) croissante et majorée mais divergente car elle n'est pas de signe constant

c) croissante, minorée et convergente

d) convergente car toute suite bornée converge

Question 24 : La suite $\left(\inf\limits_{p \geqslant n} y_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est

a) décroissante et minorée car elle a les mêmes propriétés que la suite $\left(\inf\limits_{p \geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b) croissante et majorée donc convergente

c) divergente car la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge

d) minorée et convergente

Question 25 : Les limites des suites $\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\inf\limits_{p\geqslant n} y_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient, si elles existent

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} y_p\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} y_p\right)$

et celles des suites $\left(\sup\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sup\limits_{p\geqslant n} y_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geqslant n} y_p\right) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geqslant n} x_p\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} -y_p\right) \geqslant -\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geqslant n} y_p\right) \geqslant -\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geqslant n} x_p\right)$

Question 26 : On considère dans cette question le cas particulier où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n=(-1)^n$. On a alors

a) $y_n=0$ si n est impair et $y_n=\dfrac{1}{n+1}$ si n est pair

b) $y_n=-\dfrac{1}{n+1}$ si n est impair et $y_n=0$ si n est pair

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geqslant n} x_p\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right) < \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geqslant n} y_p\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geqslant n} y_p\right) < \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geqslant n} x_p\right)$

Question 27 : On peut avoir, pour certaines suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et $\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente et $\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente

et pour tout suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a l'équivalence

c) $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente$] \Leftrightarrow \left[\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ et }\left(\sup\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ convergentes}\right]$

d) $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente$] \Leftrightarrow \left[\left(\inf\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ et }\left(\sup\limits_{p\geqslant n} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ convergentes et ont même limite}\right]$

Soit A un nombre réel non nul, α un élément de l'intervalle $]1,+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0 et vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n=A$ où
$\theta_n=u_n^{1-\alpha}-u_{n+1}u_n^{-\alpha}\ \forall n\in\mathbb{N}$

Question 28 : On a nécessairement

a) $A<0$

b) $A>0$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n=u_{n+1}^{1-\alpha}-u_n^{1-\alpha}\ \forall n\in\mathbb{N}$

c) est convergente et a pour limite $(1-\alpha)A$

d) est divergente car $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \left[\left(1-\theta_n u_n^{\alpha-1}\right)^{1-\alpha} - 1\right] u_n^{1-\alpha}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1-\alpha} = +\infty$

Question 29 : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ et $y_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) a pour limite $(\alpha-1)A$ car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\alpha-1)A$

b) a pour limite $(1-\alpha)A$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite

c) $n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

d) $[(1-\alpha)A]^{\frac{1}{1-\alpha}}\, n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

- PARTIE IV -

On considère la fonction réelle g définie sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$g(t) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ \ell & \text{si} \quad t = 0 \text{ où } \ell \text{ est un réel fixé.} \end{array} \right.$$

Question 30 : La fonction g est

a) dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour tout ℓ réel

b) continue mais non dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans le cas où $\ell = 1$

c) pour $\ell = 1$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et a pour dérivée $g'(t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\cos t}{t^2}(t - \tan t) \ \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{array} \right.$

d) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ uniquement, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$.

Question 31 : La fonction g est, pour tout ℓ réel

a) croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

b) décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car $g'(t) \leqslant 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

c) décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ mais n'est pas décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ car g' n'est pas définie en 0

d) décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ uniquement pour $\ell \geqslant 1$.

Question 32 : On a alors, pour tout ℓ réel

a) $1 \leqslant g(t) \leqslant g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \ \forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

b) $\dfrac{2}{\pi} \leqslant g(t) \leqslant \ell \ \forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

c) $\dfrac{2}{\pi} \leqslant g(t) \leqslant 1 \ \forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

d) $\dfrac{2}{\pi} \leqslant g(t) \leqslant 1 \ \forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$