ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNÉE 2006

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Ce sujet comporte (dans l'énoncé d'origine, pas dans cette version) :
- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissement
- 8 pages de texte, numérotées de 1 à 8.

CALCULATRICE AUTORISÉE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

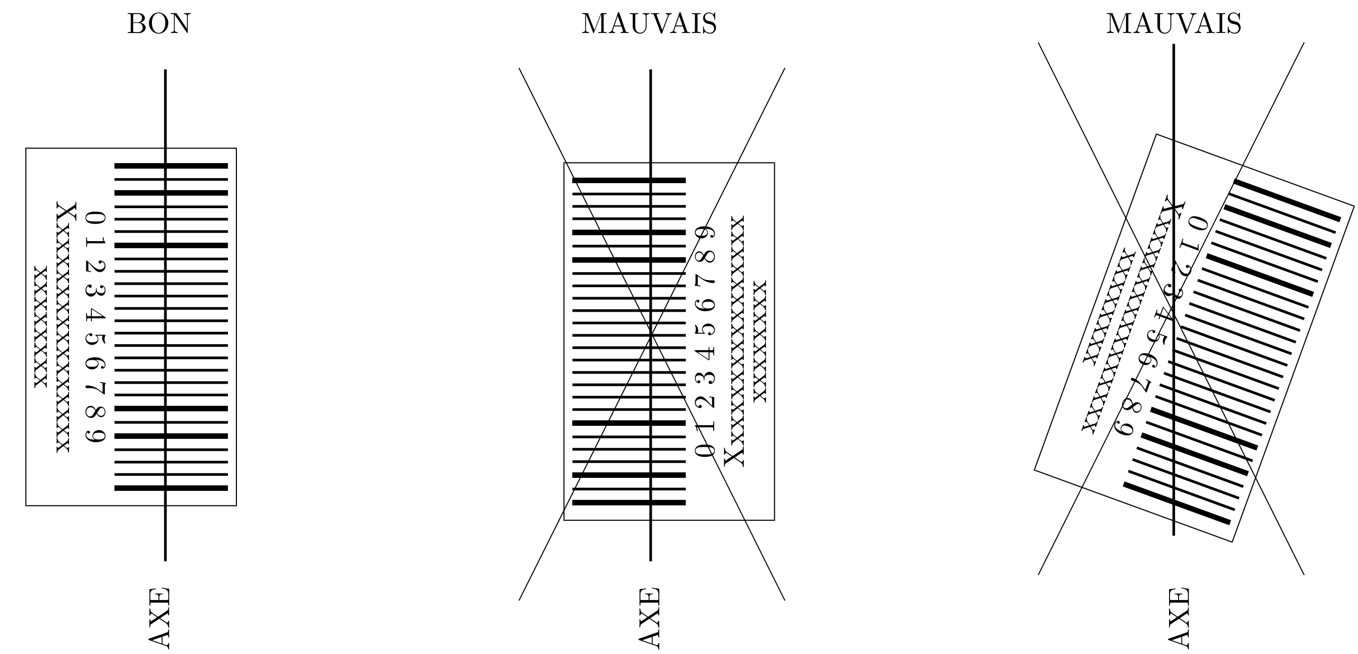
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 31 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question ,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse
  vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
  vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
  vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

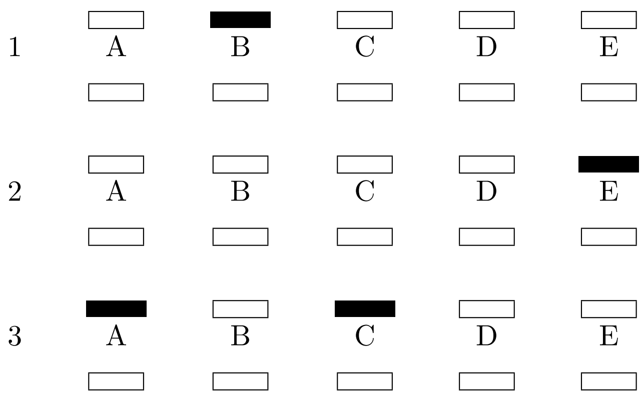
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D)2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



QUESTIONS LIEES

1 à 9
10 à 13
14 à 21
22 à 25
26 à 29
30 à 32
33 à 36

PARTIE I

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, u, v). On considère une transformation qui à tout point m d'affixe le nombre complexe non nul z, associe le point M d'affixe le nombre complexe Z vérifiant l'équation (H) : $Z = \left(z^2 + 1\right)/z^2$. On note $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ la forme trigonométrique ou exponentielle du complexe z.

Question 1 : La forme trigonométrique ou exponentielle de Z s'écrit

a) $\left(1/r^2\right)\mathrm{e}^{-2i\theta}$

b) $1 - \left(1/r^2\right)\mathrm{e}^{-2i\theta}$

c) $1 + \left(1/r^2\right)e^{-2i\theta}$

d) $1 - \left(1/r^2\right)\mathrm{e}^{2i\theta}$

Question 2 : La partie réelle de Z s'écrit

a) $\left(1/r^2\right)\cos(-2\theta)$

b) $1 + \cos(-2\theta)$

c) $1 + \sin(2\theta)$

d) $1 + \left(1/r^2\right)\cos(2\theta)$

Question 3 : La partie imaginaire de Z s'écrit

a) $1 + \left(1/r^2\right)\cos(-2\theta)$

b) $\sin(-2\theta)$

c) $-\left(1/r^2\right)\sin(2\theta)$

d) $1 - \left(1/r^2\right)\sin(2\theta)$

Question 4 : Dans cette question on suppose que Z est un nombre complexe donné Z_0, distinct de 1 et affixe d'un point M_0. Pour un tel Z

a) on ne peut pas trouver z, non nul, vérifiant l'équation (H)

b) il est toujours possible de déterminer z, non nul, vérifiant l'équation (H)

c) l'équation (H) a une solution unique z_0

d) l'équation (H) admet deux solutions

Question 5 : Soit Z un complexe, distinct de 1, représenté sous forme cartésienne par le nombre $X + iY$, où X et Y sont deux nombres réels. Pour un tel Z, on note $z = x + iy$ un complexe, solution, s'il en existe, de l'équation (H) : $Z = (z^2 + 1)/z^2$. On a nécessairement

a) X différent de 1 et Y non nul

b) $x^2 + y^2 = (X-1)/\left((X-1)^2 + Y^2\right)$

c) $x^2 - y^2 = (X-1)/\left((X-1)^2 + Y^2\right)$

d) $2xy = -Y/\left((X-1)^2+Y^2\right)$

Question 6 : Soit Z un complexe, distinct de 1, représenté sous forme trigonométrique ou exponentielle par $R\,\mathrm{e}^{-i\varphi}$, φ réel fixé. Pour un tel Z, on note $z = r\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ un complexe, solution, s'il en existe, de l'équation (H) : $Z = \left(z^2+1\right)/z^2$. On a nécessairement

a) R est différent de 1 ou φ non nul

b) R est différent de 1 et φ différent de $2k\pi$, où k est un entier relatif

c) $r^2 = 1/\left(R^2+1-2R\cos\varphi\right)$

d) $r^2 = 1/\left(R^2+1-2R\cos\varphi\right)^{1/2}$

Question 7 : On suppose dans cette question que le point m d'affixe le nombre complexe non nul z décrit la demi-droite D d'origine O, privée de O, de vecteur directeur e tel que l'angle (u, e) soit égal à $\pi/4$. Le point M d'affixe le nombre complexe Z vérifiant l'équation (H) : $Z = \left(z^2+1\right)/z^2$ décrit alors

a) une demi-droite

b) le demi-axe (O, u)

c) le demi-axe $(O, -v)$

d) le cercle de centre O et de rayon $V2$

Question 8 : Si le point M, d'affixe Z, décrit le cercle de centre O et de rayon 1, alors

a) on ne peut pas trouver de solution z à l'équation (H)

b) $\theta = (2\pi/3) + 2k\pi$ où k est un entier relatif

c) $\theta = (2\pi/3) + 2k\pi$ ou $\theta = -(2\pi/3) + 2k\pi$ où k est un entier relatif

d) $\theta = -\pi/2$

Question 9 : Si le point M, d'affixe Z, décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe 1, alors on a, k désignant un entier relatif

a) $\theta = (\pi/3) + 2k\pi$

b) $\theta = (2\pi/3) + 2k\pi$ ou $\theta = -(2\pi/3) + 2k\pi$

c) $\theta = (\pi/3) + k\pi$ ou $\theta = -(\pi/3) + k\pi$

d) $\theta = (2\pi/3) + k\pi$ ou $\theta = -(2\pi/3) + k\pi$

PARTIE II

Soit y une fonction, y'' sa dérivée seconde et ω un réel non nul.
On considère l'équation différentielle du second ordre (E) : $y''(x) = -\omega^2 y(x)$.
On note S l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle deux fois continûment dérivables vérifiant l'équation (E).

Question 10 : On a

a) la fonction qui au réel x associe $\cos(\omega x)$ appartient à S

b) la fonction nulle n'appartient pas à S

c) la somme de deux fonctions de S n'appartient pas nécessairement à S

d) la produit d'un élément quelconque de S par un réel appartient à S

Soit y un élément de S et z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(x) = y(x) - y(0)\cos(\omega x) - ((y'(0)\sin(\omega x))/\omega)$$

Question 11 : La fonction z

a) n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

b) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $z'(x) = y'(x) + y'(0)\omega\sin(\omega x) - y''(0)\cos(\omega x)$

c) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $z'(x) = y'(x) + y(0)\sin(\omega x) - ((y'(0)\cos(\omega x))/\omega)$

d) s'annule en 0, de même que sa dérivée première

Question 12 : La fonction z

a) n'appartient pas à S puisqu'elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

b) est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'appartient pas à S

c) appartient à S comme combinaison linéaire, à coefficients réels, d'éléments de S

d) vérifie les conditions $z(0) = 0$ et $z'(0) = (\omega - 1)y'(0)/\omega$

Question 13 : La fonction y, solution de l'équation s'écrit pour $0 \leqslant x$

a) $y(x) = y'(0)\cos(\omega x) - ((y(0)\sin(\omega x))/\omega)$

b) $y(x) = y'(0)\sin(\omega x) - ((y(0)\cos(\omega x))/\omega)$

c) $y(x) = y(0)\cos(\omega x) - (y(0)\sin(\omega x))$

d) $y(x) = y(0)\cos(\omega x) - ((y'(0)\sin(\omega x))/\omega)$

PARTIE III

On considère l'équation différentielle (E) : $2y''(x) - 3y'(x) + y(x) = 0$.
Soit f la fonction qui à x associe $f(x) = \mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{x}$ et g la fonction qui à x associe $g(x) = \ln|f(x)|$.

Question 14 : On désigne par A et B deux constantes réelles. La solution générale de l'équation (E) est de la forme

a) $y(x) = A\,\mathrm{e}^{-x/2} + B\,\mathrm{e}^{x}$

b) $y(x) = A\,\mathrm{e}^{-x/2} + B\,\mathrm{e}^{-x}$

c) $y(x) = A\,\mathrm{e}^{x/2} + B\,\mathrm{e}^{-x}$

d) $y(x) = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{x}$

Question 15 : La fonction f

a) est définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$

b) est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

c) a pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$

d) a limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

Question 16 : La fonction f

a) est toujours positive

b) est toujours négative

c) ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$

d) est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^*$

Question 17 : La fonction g

a) est définie sur $\mathbb{R}$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}$

b) n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$

c) est définie sur $\mathbb{R}^*$

d) est égale à $\ln(f(x))$ car f est toujours positive

Question 18 : La fonction g a pour limite

a) 0 lorsque x tend vers $+\infty$

b) $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

c) 0 lorsque x tend vers 0

d) $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$

Question 19 : La fonction g

a) n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^*$

b) a pour dérivée la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g'(x) = \ln|f'(x)|$

c) a pour dérivée la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x) = f'(x)/f(x)$

d) a pour dérivée la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g'(x) = 1/f(x)$

Question 20 : La fonction g vérifie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$

a) $g(x) - x = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{x/2}\right)$

b) $g(x) - x = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x/2}\right)$

c) $g(x) = x + \ln\left(1 + e^{-x/2}\right)$

d) $g(x) - x = \ln\left(e^{-x/2} - 1\right)$

Question 21 : La courbe représentative C_g de la fonction g

a) n'admet pas d'asymptote

b) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$

c) admet une asymptote verticale d'équation $y = x/2$

d) admet une asymptote oblique d'équation $y = -x/2$

PARTIE IV

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \left(x^2 + 2\right)^{1/2}$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x + u(x)\right)$.
On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 (1/u(x))\ \mathrm{d}x$; $J = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2/u(x)\right)\ \mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 u(x)\ \mathrm{d}x$

Question 22 : On note u' la dérivée de la fonction u et f' la dérivée de la fonction f. On a

a) $u'(x) = u(x)/2$ pour tout x réel

b) $u'(x) = 2x/u(x)$ pour tout x réel

c) $f'(x) = u(x)$ pour tout x appartenant à l'intervale $[0,1]$

d) $f'(x) = 1/u(x)$ pour tout x appartenant à l'intervale $[0,1]$

Question 23 : L'intégrale I est égale à

a) $\ln\left((1 - \sqrt{3})/\sqrt{2}\right)$

b) $\ln(1 - \sqrt{3})\ln(\sqrt{2})$

c) $\ln(1 + \sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2})$

d) $\ln\left((1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}\right)$

Question 24 : Les intégrales I, J, K vérifient

a) $J + I = K$

b) $J + 2I = K$

c) $K = 2 - J$

d) $K = \sqrt{3} - J$

Question 25 : On a

a) $J = \ln\left((1 - \sqrt{3})/\sqrt{2}\right)$

b) $J = \ln\left((1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}\right)$

c) $J = \left(\sqrt{3}/2\right) - \ln\left((1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}\right)$

d) $K = \left(\sqrt{3}/2\right) + \ln\left((1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}\right)$

PARTIE V

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) : xy'(x) - (x+1)y(x) + \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^x = 0$$

Question 26 : Soit u une fonction dérivable ne s'annulant pas. On note (H) l'équation sans second membre associée à (E) et on désigne par K une constante. On a

a) une primitive de la fonction u'/u est $\ln(u) + K$

b) une primitive de la fonction u'/u est $\left(-1/u^2\right) + K$

c) la solution générale de (H) est de la forme $K \ln\left|\mathrm{e}^{x+1}\right|$

d) la solution générale de (H) est de la forme $Kx\,\mathrm{e}^x$

Question 27 : On suppose dans cette question et la suivante que $y(x) = C(x)x\,\mathrm{e}^x$. On a alors

a) $y(x) = C'(x)x\,\mathrm{e}^x + C(x)\,\mathrm{e}^x + C(x)x\,\mathrm{e}^x$

b) $y'(x) = C(x)x\,\mathrm{e}^x + C'(x)\,\mathrm{e}^x + C'(x)x\,\mathrm{e}^x$

c) $C'(x)x\,\mathrm{e}^x = -\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$

d) $C(x)x^2\,\mathrm{e}^x + C'(x)x\,\mathrm{e}^x + C(x)x^2\,\mathrm{e}^x + C(x)x^2\,\mathrm{e}^x - C(x)x\,\mathrm{e}^x - \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x = 0$

Question 28 : La fonction C vérifie

a) $C'(x) = 1 + \left(1/x^2\right)$

b) $C(x) = -1 - \left(1/x^2\right)$

c) $C'(x) = -1 - \left(1/x^2\right)$

d) $C(x) = -x - (1/x) + k$ où k est une constante réelle

Question 29 : On obtient, k_1 et k_2 désignant des constantes réelles,

a) $y(x) = \left(-x^2 - 1 + k_1 x\right)\mathrm{e}^x$ pour tout x réel non nul

b) $y(x) = \left(-x^2 + 1 + k_1 x\right)\mathrm{e}^x$ uniquement pour x réel strictement positif

c) $y(x) = \left(-x^2 + 1 + k_1 x\right)\mathrm{e}^x$ pour x réel strictement positif et $y(x) = \left(-x^2 + 1 + k_2 x\right)\mathrm{e}^{-x}$ pour x réel strictement négatif

d) $y(x) = (-x + (1/x) + k_1 x)\,\mathrm{e}^x$ pour tout x réel non nul

PARTIE VI

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \tan x$$

On note (1) l'équation $f(x) = 1$. n désigne un entier naturel.

On note enfin I_n l'intervalle $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$ pour tout n entier naturel.

Question 30 : La fonction f

a) a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(1 + (\tan x)^2\right)$

b) a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(1 + x^2 + \tan x\right)$

c) a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(1 + (\tan x)^2 + \tan x\right)$

d) a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \mathrm{e}^x\,(1 + 2\tan x)$

Question 31 : La fonction f est

a) strictement croissante et positive sur l'intervalle I_n

b) strictement croissante et positive sur l'intervalle $[n\pi, \pi/2 + n\pi[$ comme produit de deux fonctions strictement croissantes et positives sur cet intervalle

c) strictement décroissante et négative sur l'intervalle $]-\pi/2 + n\pi, n\pi[$

d) strictement décroissante sur l'intervalle $]-\pi/2+n\pi, n\pi[$ et strictement croissante sur l'intervalle $[n\pi, \pi/2+n\pi[$

Question 32 : L'équation (1)

a) n'admet pas de solution dans l'intervalle I_n

b) admet au moins deux solutions dans l'intervalle I_n

c) admet une solution unique x_n dans l'intervalle I_n, qui appartient, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, à l'intervalle $[n\pi, \pi/2+n\pi[$

d) admet une solution unique x_n dans l'intervalle I_n et on a
$$x_n = n\pi + e^{-n\pi} - e^{-2n\pi} + (7/6)e^{-3n\pi} + o\left(e^{-3n\pi}\right)$$

PARTIE VII

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique B. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet (x, y, z) de réels associe le triplet $(x+3z, 0, y-2z)$.

Question 33 : La matrice A de f par rapport à la base B s'écrit

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Question 34 : L'endomorphisme f est de rang :

a) 3 car A a 3 colonnes non nulles

b) au plus 2 car A a une ligne nulle

c) 2 car le rang est égal au nombre de lignes non nulle de l'une des représentations matricielles de l'endomorphisme

d) 3 car f est défini sur un espace vectoriel de dimension 3

Question 35 : Le noyau de l'endomorphisme f a pour dimension :

a) 0 car $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

b) 1 car $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f$

c) 2 car la matrice A de f a 2 colonnes non nulles linéairement indépendantes

d) 3 car f est défini sur un espace vectoriel de dimension 3

Question 36 : Les sous-espaces image et noyau de f vérifient :

a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$

b) $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe car $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

c) $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Im} f$

d) $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker} f$