ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ANNEE 2007**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTES DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Ce sujet comporte :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissement
- 9 pages de texte, numérotées de 1 à 9.

CALCULATRICE AUTORISEE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

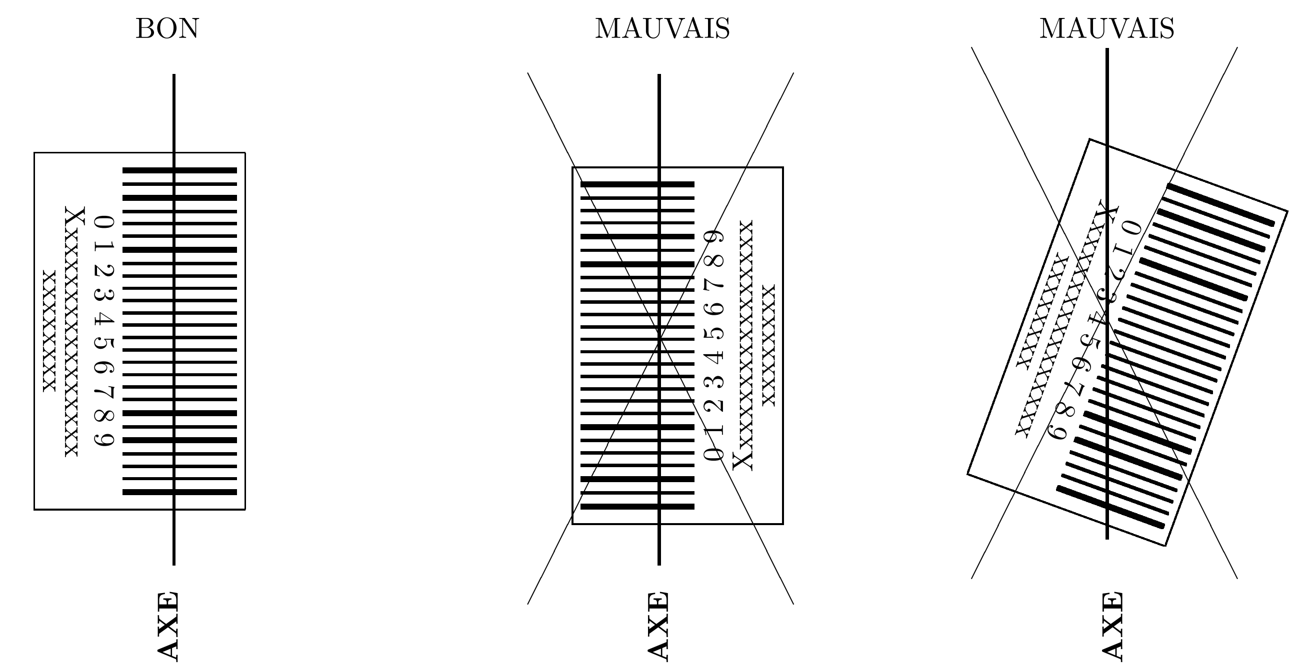
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée avant l'énoncé du sujet lui-même.
Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro. Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question ,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse
vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne,
vous devez alors noircir la case e.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

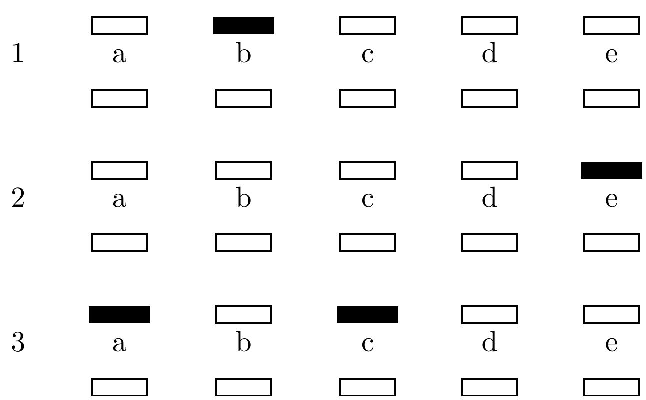
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Epreuve de Mathématiques
Concours EPL/S 2007

QUESTIONS LIEES

1 à 4

5 à 9

10 à 21

22 à 32

33 à 36

PARTIE I

On désigne par j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. 0n considère le système (E)

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + jy + j^2 z &= b \\ x + j^2 y + jz &= c \end{aligned}$$

où a, b, c désignent trois nombres complexes donnés.

Question 1. Le nombre complexe j vérifie

A) $j^2 = 1$

B) $j^3 - 1 = 0$

C) $1 + j + j^2 = 0$

D) $1 - j - j^2 = 0$

Question 2. Les nombres complexes x, y et z vérifiant le système (E) sont tels que

A) $3y + (x+z)(1+j+j^2) = a + bj^2 + cj$

B) $3y + (x+z)(1+j+j^2) = a + b + c$

C) $3y + (x+z)(1+j+j^2) = a + bj + cj^2$

D) $3x + (y+z)(1+j+j^2) = a + bj^2 + cj$

Question 3. Le système (E)

A) n'admet pas de solution

B) admet au moins deux solutions

C) admet une solution unique $x = (a+b+c)/3 \quad y = (a+bj^2+cj)/3 \quad z = (a+bj+cj^2)/3$

D) admet une solution unique $x = (a+b+c)/3 \quad y = (a+bj+cj^2)/3 \quad z = (a+bj^2+cj)/3$

Question 4. Une condition nécessaire et suffisante pour que x, y, z vérifiant le système (E) soient des nombres réels est

A) a, b, c réels

B) a, b, c complexes non réels

C) a réel et $b = c = 0$

D) a réel et b et c complexes conjugués car j^2 et $(-j)$ sont complexes conjugués

PARTIE II

n étant un entier naturel et α un nombre réel non nul on pose

$$u_n = \int_0^\pi e^{\alpha x} \cos nx \, dx \qquad \text{et } v_n = \int_0^\pi e^{\alpha x} \sin nx \, dx$$

Question 5. u_n vérifie pour tout n entier naturel

A) $u_n = (1/\alpha n) \, [e^{\alpha x} \sin nx]_0^\pi$ pour n entier strictement positif et $u_0 = (e^{\alpha\pi} - 1)/\alpha$

B) $u_n = (1/\alpha) \, [e^{\alpha x}(\cos nx - (n/\alpha) \sin \alpha x)]_0^\pi + (n^2/\alpha^2) u_n$

C) $u_n = (1/(n^2 + \alpha^2)) \, [e^{\alpha x}(\alpha \cos nx + n \sin nx)]_0^\pi$

D) $u_n = (1/(n^2 - \alpha^2))((-1)^n e^{\alpha\pi} \alpha - \alpha)$

Question 6. v_n satisfait, pour tout n entier naturel non nul

A) $v_n = (1/\alpha n) \, [-e^{\alpha x} \cos nx]_0^\pi$

B) $v_n = (1/\alpha) \, [e^{\alpha x}(\sin nx - (n/\alpha) \cos nx)]_0^\pi - (n^2/\alpha^2) v_n$

C) $v_n = (1/(n^2 - \alpha^2)) \, [e^{\alpha x}(n \cos nx - \alpha \sin nx)]_0^\pi$

D) $v_n = (1/(n^2 + \alpha^2))((-1)^{n+1} n e^{\alpha\pi} + n)$

Question 7. La valeur absolue de u_n est, pour tout n entier naturel, majorée par

A) $|\alpha|/(n^2 + \alpha^2)$

B) $|\alpha|/(1 + e^{\alpha\pi})/|n^2 - \alpha^2|$

et celle de v_n est majorée par

C) $n(1 - e^{\alpha\pi})/(n^2 + \alpha^2)$

D) $(1 + e^{\alpha\pi})/(\alpha n)$

Question 8. La suite (v_{2k}), k entier strictement positif, est équivalente à la suite de terme général

A) $(1 - e^{\alpha\pi})/(2k)$

B) $(1 + e^{\alpha\pi})/k$

C) $1/(2k)$

D) $1/k$

Question 9. A) les suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être convergentes car elles ne sont pas de signe constant

B) les suites (u_n) et (v_n) convergent car toute suite majorée est convergente

C) la suite (u_n) converge vers 0

D) la suite (u_n) diverge car la suite de terme général $\cos nx$ n'admet pas de limite

PARTIE III

On considère les fonctions φ_1 qui à u élément du segment $I = [0, \pi/2]$, associe $\varphi_1(u) = 1/(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)$ et φ_2 qui à u élément du segment I associe $\varphi_2(u) = (\sin u)/(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)$, x étant un paramètre réel.

Question 10. La fonction φ_1

A) est définie sur I pour tout x réel

B) est définie sur I pour tout x réel positif ou nul

C) est définie et continue sur I pour x réel strictement positif

D) est continue sur I uniquement pour x réel strictement positif

Question 11. La fonction φ_2

A) est dérivable sur I pour tout x réel non nul

B) est dérivable sur I pour tout x réel

C) est dérivable sur $]0, \pi/2]$ pour tout x réel et a pour dérivée
$\varphi_2'(u) = (x^2(\cos u)^3 + 2(x^2 - 1/2)(\cos u)(\sin u)^2)/(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^2$

D) a pour dérivée pour tout u appartenant I et pour tout x réel strictement positif
$\varphi_2'(u) = (\cos u)/(1 - x^2)(\sin 2u)$

Question 12. Les intégrales $\int_0^{\pi/2} \varphi_1(u)\, du$ et $\int_0^{\pi/2} \varphi_2(u)\, du$

A) sont définies pour tout x réel car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment

B) sont définies pour tout x réel non nul car toute fonction définie sur un segment est intégrable sur ce segment

C) sont définies pour x réel strictement positif car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment

D) sont définies pour tout x réel non nul car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment

Question 13. La fonction F définie par $F(X) = \int_0^X (1/(1+t^2))\, dt$

A) n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

B) est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$

C) a pour limite $\pi/2$ lorsque X tend vers $+\infty$

D) a pour limite $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$

Question 14. On pose $J(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_1(u)\, du$ et $K(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_2(u)\, du$, x appartenant à $]0,1[$
On obtient en utilisant les changements de variable $t = (\tan u)/x$ et $v = \cos u$

A) $J(x) = \int_0^{\pi/2} x(1+x^2t^2)/((1+x^2t^2)(1+t^2)x^2)\, dt$

B) $J(x) = \int_0^{1} (1/(1+t^2))\, dt = \pi/2$

C) $K(x) = \int_0^{1} (1/(x^2v^2+1-v^2))\, dv$

D) $K(x) = \int_0^{1} (1/(1-(1-x^2)v^2))\, dv = (1/(2(1-x^2)^{1/2}))\ln((1+(1-x^2)^{1/2})/(1-(1-x^2)^{1/2}))$

Question 15. La fonction $K(x)$ est équivalente au voisinage de 0 à la fonction

A) $\ln x$

B) $-\ln x$

C) $1/x$

D) $-2\ln x$

On considère l'application f dfinie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x \displaystyle\int_0^{\pi/2} u\varphi_1(u)\, du$.

Question 16. La fonction f vérifie

A) $f(1) = 0$

B) $f(1) = \pi^2/8$

C) $f(x) + f(1/x) = x\pi^2/4$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$

D) $f(x) + f(1/x) = \pi^2/4$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$

Question 17. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(u) = u - (\pi \sin u)/2$ vérifie

A) h est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

B) h est dérivable mais n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

C) h est positive sur $[0,\pi/2]$ car h' est strictement positive sur ce segment

D) h est négative ou nulle sur $[0,\pi/2]$ car h est décroissante puis croissante sur ce segment

Question 18. On a pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$

A) $xK(x)\pi/2 \leqslant f(x)$

B) $0 \leqslant f(x) \leqslant xK(x)\pi/2$

C) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ car $K(x)$ est équivalent à $-2\ln x$ en 0

D) $\pi/2 \leqslant \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Question 19. Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ a pour limite, si elle existe,

A) $+\infty$

B) $-\infty$

C) $\pi^2/4$

D) $\pi^2/4 - \pi/2$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \int_0^{\pi/2} (u/(x(\cos u)^2 + (\sin u)^2)\, du$

Question 20. x désignant un réel strictement positif et k un réel tel que $0 < |k| < x/2$, on pose, pour tout u appartenant au segment I

$$P = x(\cos u)^2 + (\sin u)^2 \text{ et } Q = k(\cos u)^2. \text{ On a}$$

A) $1/(P+Q) = (1/P) - (Q/P^2) + (Q^2/(P^2(P+Q)))$

B) $1/(P+Q) = (1/P) + (Q/P^2) - (Q^2/(P^2(P+Q)))$

C) $|((g(x+k) - g(x))/k) + \int_0^{\pi/2} u(\cos u)^2/(x(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^2\, du| \leqslant$
$$|k| \int_0^{\pi/2} u(\cos u)^4/((x/2)(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^3\, du$$

D) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et a pour dérivée $g'(x) = \int_0^{\pi/2} u(\cos u)^2/(x(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^2\, du$

Question 21. On a

A) $f(x) = xg(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

B) $f(x) = xg(x^2)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

C) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et a pour dérivée
$f'(x) = g(x^2) + 2x^2 g'(x^2) = \int_0^{\pi/2} u(3x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)/(x^2(\cos u)^2 + (\sin u)^2)^2\, du$

D) f n'est pas dérivable sur $]0, +\infty[$

PARTIE IV

Dans l'espace vectoriel F des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble E des fonctions de la forme $P(x)\text{ch}x + Q(x)\text{sh}x$ où P et Q sont deux fonctions polynmes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On désigne par f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$f_1(x) = \text{ch}x$, $f_2(x) = \text{sh}x$, $f_3(x) = x\text{ch}x$, $f_4(x) = x\text{sh}x$, $f_5(x) = x^2\text{ch}x$, $f_6(x) = x^2\text{sh}x$

Question 22. L'ensemble E

A) est un anneau

B) est un sous-espace vectoriel de F

C) n'est pas un sous-espace vectoriel de F

D) groupe pour la loi de multiplication des fonctions

Question 23. On pose $f(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\text{ch}x + (\mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2)e^x$

A) la fonction $f(x)e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ quelque soit les réels λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3

B) la fonction $f(x)e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\lambda_1+\mu_1 = \lambda_2+\mu_2 = \lambda_3 + \mu_3 = 0$

C) la fonction $f(x)e^{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ quelque soit les réels λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3

D) la fonction $f(x)e^{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\lambda_1-\mu_1 = \lambda_2-\mu_2 = \lambda_3 - \mu_3 = 0$

Question 24. La famille des six fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6

A) est une famille génŕatrice et liée de E

B) est libre mais n'est pas une base de E

C) est une base de E

D) n'est ni libre ni génératrice dans E

Question 25. On note D l'application de F dans F qui à une fonction f associe sa dérivée f'

A) D est une application linéaire de E dans F mais n'est pas un endomorphisme de E

B) D n'est pas un endomorphisme de F

C) D est un endomorphisme de E

D) D n'est pas une application linéaire

Question 26. La matrice de D dans une base de E constituée à l'aide des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 est

A) une matrice carrée d'ordre 5

B) une matrice carrée d'ordre 6 symétrique réelle

C) une matrice carrée d'ordre 6 antisymétrique réelle

D) une matrice à 5 lignes et 6 colonnes

Question 27. L'application D

A) réalise une bijection de E sur lui-même

B) ne réalise pas une bijection de E sur lui-même car elle n'est pas injective

C) ne réalise pas une bijection de F sur lui-même car $D(f+k) = D(f)$ avec k est une fonction constante donnée

D) réalise une bijection de F sur lui-même

Question 28. On note id l'application identique de F dans lui-même.

A) l'image de E par l'application $(D^2 - id)$ est l'espace vectoriel de dimension 4 engendré par la famille (f_1, f_2, f_3, f_4)

B) l'image de E par l'application $(D^2 - id)$ est un espace vectoriel de dimension 3

C) l'image de E par l'application $(D^2 - id)^2$ est un espace vectoriel de dimension 3

D) l'image de E par l'application $(D^2 - id)^p$, pour p entier supérieur ou égal à 3 est l'espace réduit au vecteur nul

Question 29. Le noyau de l'application $(D^2 - id)$

A) est réduit à l'application nulle car $(D^2 - id)$ est une application linéaire injective

B) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $f'' - f = 0$

C) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $(f')^2 - f = 0$

D) est l'espace de dimension 2 engendré par la famille (f_1, f_2)

Question 30. Le noyau de l'application $(D^2 - id)^2$

A) est réduit à l'application nulle car $(D^2 - id)$ est une application linéaire injective

B) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $f'' - f = 0$

C) est l'espace de dimension 2 des solutions de l'équation différentielle $f'' - f = \lambda \mathrm{ch} x + \mu \mathrm{sh} x$ où λ et μ sont des constantes réelles

D) est l'espace de dimension 4 engendré par la famille (f_1, f_2, f_3, f_4)

Question 31. Le noyau de l'application $(D^2 - id)^3$

A) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $f'' - f = 0$

B) est l'espace de dimension 2 des solutions de l'équation différentielle $f'' - f = \lambda_1 \mathrm{ch} x + \mu_1 \mathrm{sh} x + \lambda_2 x \mathrm{ch} x + \mu_2 x \mathrm{sh} x$ où λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 sont des constantes réelles

C) est l'espace de dimension 4 engendré par la famille (f_1, f_2, f_3, f_4)

D) est réduit à l'application nulle car $(D^2 - id)$ est une application linéaire injective

Question 32. L'ensemble des solutions de l'équation diffrentielle linéaire

$$y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y^{(2)} - y = 0$$

A) est égal à $\mathrm{Ker}((D^2 - id)^3)$

B) est égal à $\mathrm{Ker}((D^2 - id)^4)$

C) est l'espace vectoriel, de dimension 6, E

D) est égal à $\mathrm{Im}((D^3 - id)^2)$

PARTIE V

Soit n un entier positif ou nul, on note E_n l'espace vectoriel des polyômes à une indéterminée X à coefficients réels de degré au plus égal à n.

Il existe, pour tout n entier naturel, un et un seul polynôme P_n appartenant à E_n qui vérifie

$$\cos(nx) = P_n(\cos x) \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

Question 33. On a pour tout entier n strictement positif

A) $P_{n+1} + P_{n-1} = XP_n$

B) $P_{n+1} - P_{n-1} = 2XP_n$

C) $P_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} (-1)^p \binom{n}{p} X^{n-2p}(1-X^2)^p$

D) $P_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} X^{n-2p}(X^2-1)^p$

Question 34. Ces polynômes vérifient pour tout n, P'_n désignant le polynôme dérivé de P_n,

A) $P_n(0) = 1$ et P_n est pair si n est pair

B) $P_n(-1) = 0$ et P_n est impair si n est impair

C) $P_{2n}(0) = (-1)^n$ et $P'_{2n+1}(0) = (-1)^n(2n+1)$

D) $P_n(-1) = (-1)^n$ et $P'_n(-1) = 0$

Question 35. Pour $n > 0$, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction polynôme $P_n(x)$ est équivalente à

A) $2^n x^n$

B) $2^{n-1} x^n$

C) $(n-1)!\, x^n$

D) $n!\, x^n$

Question 36. Les polynômes P_3 et P_4 sont

A) $P_3 = 4X^3 - 3X$ et $P_4 = 8X^4 + 8X^2 + 1$

B) $P_3 = 4X^3 + 3X$ et $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

C) $P_3 = 3X^3 - 4X$ et $P_4 = 12X^4 + 8X^2 + 1$

D) $P_3 = 6X^3 - 4X$ et $P_4 = 12X^4 - 8X^2 + 1$