## COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Sujet commun aux ENS de CACHAN, LYON et PARIS)

Dans tout le problème, L est un réel strictement positif fixé et I désigne l'intervalle fermé $[0, L]$. On notera $C^0(I)$ l'espace des fonctions définies et continues sur I, à valeurs réelles. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $C^k(I)$ l'espace des fonctions définies sur I et admettant une dérivée k-ème continue sur I (chaque dérivée j-ème en 0 pour $1 \leq j \leq k$ étant en fait une dérivée à droite, et chaque dérivée j-ème en L étant une dérivée à gauche). Enfin, on désigne par a et b deux fonctions appartenant à $C^1(I)$.

### Première partie

*Dans cette partie, on considère le problème :*

$$\begin{cases} y'' = a\,y' + b\,y + g \\ y(0) = \alpha, \quad y(L) = \beta \end{cases}$$

*où $g \in C^0(I)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ; on le transforme en un problème équivalent, et on montre que sous certaines conditions, il admet une solution unique.*

**1.** Soient $g \in C^0(I)$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$. Justifier brièvement l'existence et l'unicité dans $C^2(I)$ de la solution y au problème (1) suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y + g(x) \\ y(0) = \alpha_0, \quad y'(0) = \alpha_1 . \end{cases}$$

**2.** On suppose que le problème $\begin{cases} y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \end{cases}$ admet la seule solution $y \equiv 0$.

On note **S** l'espace vectoriel des solutions $y \in C^2(I)$ de l'équation $y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y$.

a) Quel est le rang de l'application de **S** dans $\mathbb{R}^2$ définie par $y \mapsto (y(0), y(L))$ ?

b) Soient $g \in C^0(I)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que le problème :

$$(2) \qquad \begin{cases} y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y + g(x) \\ y(0) = \alpha, \quad y(L) = \beta \end{cases}$$ admet une solution unique $y \in C^2(I)$.

**3.** Soit $g \in C^0(I)$. Montrer que l'équation :

$$y'' = a(x)\, y' + b(x)\, y + g(x)$$

équivaut à une équation de la forme :

$$(3) \qquad -(p(x)\, y')' + q(x)\, y = h(x)$$

où p, q et h sont des fonctions que l'on déterminera. On choisira p de façon que $p(0) = 1$.

**4.** Montrer que si $b(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors pour tout $g \in C^0(I)$ et tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique fonction $y \in C^2(I)$ satisfaisant le problème (2).

(On pourra considérer l'équation (3) avec $h \equiv 0$ et les conditions aux bords $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, multiplier l'équation différentielle par y et intégrer sur $[0, L]$.)

## Deuxième partie

*Dans cette partie, on étudie le problème aux valeurs propres pour l'application définie par :*
*$y \mapsto (-py')' + qy$, et on le ramène à un problème aux limites (5) pour une équation différentielle du premier ordre.*

Soit $p \in C^2(I)$ une fonction minorée sur I par une constante $p_0$ strictement positive :

$$\exists\, p_0 > 0 : \forall\, x \in I,\ p(x) \geq p_0.$$

Soit $q \in C^1(I)$. On cherche les nombres réels $\lambda$ pour lesquels le problème :

$$(4) \qquad \begin{cases} -(p(x)\, y')' + q(x)\, y = \lambda y \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \end{cases}$$

admet des solutions $y \in C^2(I)$ **non triviales,** autrement dit non identiquement nulles. On note :

$$\mathbf{E} = \{\, y \in C^2(I)\ ;\ y(0) = 0,\ \ y(L) = 0 \,\}\ ;$$

$$\mathbf{L} : \mathbf{E} \to C^0(I)$$
$$y \mapsto (-py')' + qy.$$

Par convention, un réel $\lambda$ pour lequel le problème (4) admet une solution non triviale $y_\lambda$ est appelé une **valeur propre** de L, et $y_\lambda$ une **fonction propre** associée à cette valeur propre.

**1. Dans cette question seulement**, on considère le cas particulier où $p \equiv 1$ et $q \equiv 0$. Le problème (4) s'écrit alors :

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de l'endomorphisme **L** correspondant.

Désormais, on considère le cas général décrit au début de la deuxième partie.

**2.** En utilisant les résultats de la première partie :

**2.a.** Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de **E** constitué des solutions de (4) lorsque $\lambda$ est une valeur propre de **L** ;

**2.b.** Montrer qu'il existe un réel $\mu_0$ tel que pour tout $\lambda \leq \mu_0$, le problème (4) n'admet que la solution triviale.

**3.a.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in C^2(I)$. Montrer que y est une solution non triviale du problème (4) si et seulement si les conditions (i) et (ii) suivantes sont satisfaites :

(i) Il existe deux fonctions $r(x)$ et $\theta(x)$ définies et de classe $C^1$ sur $I$ telles que l'on ait :

$$\forall x \in I : \quad \begin{cases} r(x) > 0 \\ y(x) = r(x) \sin \theta(x) \\ p(x)\, y'(x) = r(x) \cos \theta(x) ; \end{cases}$$

(ii) Les fonctions r et $\theta$ vérifient :

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta'(x) = \dfrac{\cos^2\theta(x)}{p(x)} - (q(x) - \lambda) \sin^2\theta(x) \\ \sin \theta(0) = 0, \quad \sin \theta(L) = 0 \end{cases}$$

$$(6) \qquad r'(x) = \left(\frac{1}{p(x)} + q(x) - \lambda\right) \sin \theta(x) \cos \theta(x)\, r(x).$$

Pour établir (i), on pourra considérer un intervalle maximal de la forme $[0, T[$ avec $T > 0$ sur lequel r et $\theta$ sont définies et de classe $C^1$, et raisonner par l'absurde en supposant $T < L$.

**3. b.** Montrer que $\lambda$ est valeur propre de **L** si et seulement si le problème (5) admet au moins une solution $\theta \in C^1(I)$ telle que :

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(L) = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

## Troisième partie

*Dans cette partie, on considère le problème défini par l'équation différentielle du problème (5) et la condition initiale $\theta(0) = 0$ ; on montre que ce problème admet une solution unique dans $C^1(I)$, et que cette solution est une fonction positive et croissante de $\lambda$.*

Soit $p \in C^2(I)$ une fonction minorée sur I par une constante $p_0$ strictement positive :

$$\exists\, p_0 > 0 : \forall x \in I,\ p(x) \geq p_0.$$

Soit $q \in C^1(I)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $\theta$ une solution maximale du problème :

$$(7) \qquad \begin{cases} \theta'(x) = \dfrac{\cos^2\theta(x)}{p(x)} - (q(x) - \lambda)\sin^2\theta(x) \\ \theta(0) = 0. \end{cases}$$

**1.** On suppose que $\theta$ est définie et de classe $C^1$ sur un intervalle maximal de la forme $[0, T[$ avec $T < L$.

**1.a.** Montrer que $\theta'$ est bornée sur $[0, T[$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^T \theta'(x)dx$.

**1.b.** Montrer que $\theta(x)$ admet une limite finie à gauche en T. En déduire une contradiction avec l'hypothèse $T < L$. Conclure que $\theta$ appartient à $C^1([0, L])$.

On note désormais $\theta(x, \lambda)$ la solution maximale du problème (7) définie sur $[0, L]$. Toutes les dérivées de cette fonction seront prises par rapport à x ; on note donc :

$$\theta'(x, \lambda) = \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, \lambda).$$

**2.** On suppose qu'il existe $x_1 \in ]0, L]$ tel que $\theta(x_1, \lambda) \leq 0$. Soit $x_0$ la borne inférieure des valeurs $x_1$ possédant cette propriété.

**2.a.** Montrer que $x_0$ est strictement positif.

**2.b.** Montrer que $\theta(x_0, \lambda) = 0$.

**2.c.** Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\theta(x, \lambda)$ soit strictement croissante sur l'intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0[$. En déduire une contradiction avec la définition de $x_0$, puis que $\theta(L, \lambda) > 0$.

**3.** Soient $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que $\lambda > \mu$. On suppose qu'il existe $x_1 \in ]0, L]$ tel que $\theta(x_1, \lambda) \leq \theta(x_1, \mu)$. Soit $x_0$ la borne inférieure des valeurs $x_1$ possédant cette propriété.

**3.a.** Montrer que $x_0 > 0$ et que $\theta(x_0, \lambda) = \theta(x_0, \mu)$.

**3.b.** Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\, x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0[ : \theta'(x, \lambda) > \theta'(x, \mu)$.

**3.c.** En déduire une contradiction avec la définition de $x_0$, puis que la fonction $\lambda \mapsto \theta(L, \lambda)$ est strictement croissante.

**4.a.** Soit $z \in C^1(I)$ telle que $z(0) = 0$. On suppose qu'il existe A, B > 0 tels que :

$$\forall\, x \in I : z'(x) \leq A + B\, z(x). \tag{8}$$

Montrer qu'alors :

$$\forall\, x \in I : z(x) \leq A\, x\, e^{Bx}.$$

**4.b.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > \mu$. On pose $z(x) = \theta(x, \lambda) - \theta(x, \mu)$. En établissant une inégalité du type (8), montrer que l'application $\lambda \mapsto \theta(L, \lambda)$ est continue.

## Quatrième partie

*Dans cette partie, on détermine les limites de $\theta(L, \lambda)$ pour $\lambda$ tendant vers $\pm\infty$, et on en déduit l'existence d'une suite infinie croissante de valeurs propres pour l'opérateur* ***L****.*

Soit $p \in C^2(I)$ une fonction minorée sur I par une constante $p_0$ strictement positive :

$$\exists\, p_0 > 0 : \forall\, x \in I,\ \ p(x) \geq p_0 .$$

Soit $q \in C^1(I)$ ; on note : $Q = \sup\{\, |q(x)| \,;\, x \in I \,\}$ ; $P = \sup\{\, p(x) \,;\, x \in I \,\}$.

**1.** Soit $\gamma \in ]0, \pi/2[$.

**1.a.** Montrer qu'il existe $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda < \mu_1,\ \ \ \forall\, x \in [0, L]\ :\frac{\cos^2 \gamma}{p(x)} - (q(x) - \lambda) \sin^2 \gamma < 0.$$

**1.b.** En utilisant un raisonnement analogue à celui de 3.b de la troisième partie, montrer que :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda < \mu_1,\ \forall\, x \in [0, L]\ :\ \theta(x, \lambda) \leq \gamma.$$

En déduire que $\theta(L, \lambda)$ tend vers 0 quand $\lambda$ tend vers $-\infty$.

**2.** On note $N(\lambda)$ la partie entière de $\dfrac{\theta(L, \lambda)}{\pi}$.

**2.a.** Montrer qu'il existe $\mu_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda > \mu_2, \quad \forall x \in I : \theta'(x, \lambda) > 0.$$

**2.b.** Soit K un segment de $[0, \theta(L, \lambda)]$. Montrer que si $\lambda > \mu_2$, l'image réciproque J de K par l'application $x \mapsto \theta(x, \lambda)$ est un segment de $[0, L]$.

**2.c.** En considérant successivement les images réciproques par l'application $x \mapsto \theta(x, \lambda)$ des segments de la forme :

$$[k\pi - \varepsilon, k\pi + \varepsilon] \text{ et } [k\pi + \varepsilon, (k+1)\pi - \varepsilon], k \in \mathbb{N}, \text{ de } [0, \theta(L, \lambda)],$$

montrer que pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit et $\mu_3 > 0$ assez grand :

$$\forall \lambda > \mu_3, \ \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[ : \ L \leq 4\,(N(\lambda)+1)\,P\varepsilon + \frac{(N(\lambda)+1)\,(\pi - 2\varepsilon)}{(\lambda - Q)\sin^2 \varepsilon}.$$

**2.d.** En déduire que $\theta(L, \lambda)$ tend vers $+\infty$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

**3.a.** Montrer que l'application **L** définie dans la deuxième partie admet une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de valeurs propres réelles, croissante et non bornée.

**3.b.** Montrer que l'on a :

$$\forall \ y, z \in \mathbf{E} : \int_0^L \mathbf{L}y(x)\, z(x)\, dx = \int_0^L y(x)\, \mathbf{L}z(x)\, dx .$$

En déduire que si $y_n$ et $y_p$ sont deux fonctions propres associées à deux valeurs propres $\lambda_n$ et $\lambda_p$ distinctes, alors on a :

$$\int_0^L y_n(x)\, y_p(x)\, dx = 0.$$

**4.** En s'inspirant de l'exemple du II-1, proposer une méthode de résolution du problème :

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)\, y = g(x) \\ y(0) = 0, \ y(L) = 0 \end{cases}$$

utilisant les fonctions propres $y_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour l'opérateur **L**.

Quelles sont selon vous les hypothèses à formuler et les assertions à démontrer pour que votre méthode soit applicable ?