(Sujet commun aux ENS de CACHAN, LYON et PARIS) (durée : 4 heures)

Les parties I et II sont indépendantes. Dans la partie II, on utilise le théorème de Stone-Weierstrass énoncé à la fin de la partie I. La partie III utilise des résultats établis dans la partie II.
Dans certains cas, une même notation peut représenter des notions différentes dans des parties différentes (en particulier : f, u). A l'intérieur d'une partie, une même notation représente toujours la même notion.
Les définitions et commentaires intéressant plusieurs questions sont précédés et suivis de carrés noirs : ■...■ .

I

■ Pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq j \leq n$, on note $C_n^j = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$;
on convient que $0! = 1$.
Si f est une fonction définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles, les polynômes de Bernstein $B_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} f(\tfrac{j}{n}).$$

Dans cette partie seulement, θ, u, v et w désignent les fonctions suivantes définies sur $[0,1]$:

$$\theta(x) = 0, \quad u(x) = 1, \qquad v(x) = x, \qquad w(x) = x^2.$$ ■

I-1-a Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, on pose : $\varphi(t) = (x e^t + 1 - x)^n$. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$ de deux manières différentes. En déduire les polynômes de Bernstein de u, v et w.

I-1-b Montrer que la suite $(B_n(w))$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers w.

■ Soit E l'algèbre des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définit une relation d'ordre non total $\leq$ sur E par :

$$f \leq g \iff \forall x \in [0,1] : f(x) \leq g(x).$$

Une fonction de $f \in E$ telle que $\theta \leq f$ est dite positive. Un endomorphisme A de l'espace vectoriel E est dit positif s'il transforme toute fonction positive en une fonction positive. ■

I-2-a Montrer que si A est un endomorphisme positif de E alors :

$$\forall f \in E : |A(f)| \leq A(|f|).$$

I-2-b Soit $f \in E$, et soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$, ne dépendant que de f et de ε, tel que :

$$\forall\, x, y \in [0,1] : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2. \qquad (1)$$

I-2-c En déduire que pour tout endomorphisme positif A de E on a :

$$\forall\, y \in [0,1] : |A(f) - f(y).A(u)| \leq \varepsilon\, A(u) + \alpha(A(w) - 2y.A(v) + y^2.A(u)) \qquad (2)$$

où $\leq$ représente la relation d'ordre sur E définie ci-dessus.

I-3 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes de l'espace vectoriel E qui possède les propriétés suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un endomorphisme positif de E ;
(ii) les suites $(A_n(u))$, $(A_n(v))$ et $(A_n(w))$ convergent uniformément sur [0,1] respectivement vers u, v et w.

I-3-a Montrer que si on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \varphi_n = A_n(w) - 2v.A_n(v) + w.A_n(u),$$

la suite (φ_n) converge uniformément sur [0,1] vers θ.

I-3-b En appliquant (2) au point y avec A_n au lieu de A, montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(A_n(f))$ converge uniformément vers f sur [0,1].

I-4 Déduire de ce qui précède le <u>théorème de Stone-Weierstrass</u> : toute fonction continue sur le segment [0,1], à valeurs réelles, est limite uniforme sur [0,1] d'une suite de fonctions polynômes.

II

II-1 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \neq 1$, on pose : $I(a) = \int_0^{\pi} \ln\,(1 - 2a.\cos x + a^2)\, dx$.

II-1-a Calculer $I(-a)$, $I(\frac{1}{a})$ et $I(a^2)$ en fonction de $I(a)$.

II-1-b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : I(a) = \frac{1}{2^n}\, I(a^{2^n})$.

II-1-c Calculer $I(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a| \neq 1$.

II-1-d Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda > 0$ et $|\mu| \neq \lambda$. Donner la valeur de :

$$J(\lambda, \mu) = \int_0^{2\pi} \ln |\mu - \lambda e^{i\theta}| \, d\theta.$$

II-2 Pour tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$, on note : $D(w,r) = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z - w| < r\}$.

Soit $R > 0$. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ une fonction de variable complexe définie dans $D(0,R)$ par une série entière de rayon de convergence au moins égal à R. Soit x_0 un nombre réel non nul tel que $|x_0| < R$. On suppose $f(x_0) = 0$, et on définit une fonction g par :

$$\forall z \in D(0,R),\ z \neq x_0 : g(z) = \frac{f(z)}{z-x_0} \,;\ g(x_0) = f'(x_0),$$

où $f'(x_0)$ est la dérivée au point x_0 de la fonction de variable réelle obtenue par restriction de f à $]-R, R[$.

II-2-a Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0, et calculer les coefficients $d_n(x_0)$ de son développement en série entière S(z) à l'origine :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(x_0)\, z^n .$$

Que sait-on a priori du rayon de convergence de cette série entière ?

II-2-b On pose pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $z \in D(0,R)$: $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} d_n(x_0) z^n$.

Montrer que l'on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0,R) \ :\ S_N(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \gamma_p(N)$$

$$\text{où} \quad \gamma_p(N) = c_p \sum_{n=0}^{p-1} z^n x_0^{p-1-n} \qquad \text{si } p \leq N$$

$$\gamma_p(N) = c_p x_0^{p-N-1} \sum_{n=0}^{N} z^n x_0^{N-n} \qquad \text{si } p > N.$$

II-2-c Soit r un nombre réel tel que $|x_0| < r < R$; on fixe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r$.
Montrer que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N} : |\gamma_p(N)| \leq p\, |c_p|\, r^{p-1}.$$

En déduire que l'on a : $S(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} c_p \left(\sum_{n=0}^{p-1} z^n x_0^{p-1-n} \right).$

II-2-d Montrer que le rayon de convergence de la série entière $S(z)$ est au moins égal à R, et que pour tout $z \in D(0,R)$ on a $S(z) = g(z)$.

III

■ Soit E l'algèbre des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On munit E de la norme $\| \; \|_2$ définie par :

$$\forall f \in E : \| f \|_2 = \left[\int_0^1 (f(t))^2 \, dt\right]^{1/2}$$

(on ne demande pas de vérifier que c'est une norme).

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante de réels positifs. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $t \mapsto t^{\lambda_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que F n'est pas dense dans E pour la norme $\| \; \|_2$. On admet que ceci équivaut à l'existence d'un élément u de E différent de la fonction nulle tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \int_0^1 t^{\lambda_k} u(t) \, dt = 0.$$

On définit une fonction de variable réelle φ par la relation :

$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 t^{\lambda} u(t) \, dt,$$

où u est l'élément de E défini ci-dessus. ■

III-1-a Montrer que φ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

III-1-b Montrer que $\varphi(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$. On pourra utiliser le théorème de Stone-Weierstrass énoncé à la fin de la partie I.

III-1-c Montrer que φ n'est pas identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Stone-Weierstrass.

■ On définit une fonction de variable réelle ψ par : $\psi(z) = \varphi\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. ■

III-2-a Montrer que l'on peut définir $\psi(1)$ de façon que ψ soit une fonction définie continue et non identiquement nulle sur $[-1,1]$.

III-2-b Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante de réels non nuls deux à deux distincts de $]-1,1[$ où ψ s'annule (ψ peut éventuellement s'annuler en d'autres points de $[-1, 1]$).

■ On <u>admet</u> que la fonction ψ se prolonge en une fonction, encore notée ψ, définie sur $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ par la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ de rayon de convergence au moins égal à 1, et bornée sur $D(0,1)$. Soit $n_0 = \inf\{n\in\mathbb{N} ; \alpha_n \neq 0\}$.

On <u>admet</u> également que pour toute fonction f définie sur $D(0,1)$, non nulle en 0, égale dans $D(0,1)$ à la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1, on a :

$$\forall r \in]0,1[: \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta \geq 2\pi \ln |f(0)|, \qquad (4)$$

où l'intégrale du membre de gauche a toujours un sens, même si f s'annule sur

$C(0,r) = \{z\in \mathbb{C} ; |z| = r\}$. ■

III-3 Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et soit $m_N = \max\{ |x_1|, \ldots, |x_N| \}$. Soit $r \in]m_N, 1[$.

III-3-a Montrer que l'on peut appliquer la relation (4) à la fonction ψ_N définie par :

$$\psi_N(z) = \frac{\psi(z)}{z^{n_0} \prod_{k=1}^{N} (z-x_k)}$$

pour la valeur de r définie au début du 2°. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall r \in]m_N, 1[\; : \; 2\pi \sum_{k=1}^{N} \ln |x_k| \geq C + 2\pi (N+n_0) \ln r.$$

III-3-b Déterminer la nature de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln |x_k|$.

III-3-c Déterminer la nature de la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}$.

III-4 Enoncer le théorème démontré dans les parties II et III. Comparer ce théorème au théorème de Stone-Weierstrass établi dans la partie I.