COMPOSITION DE MATHEMATIQUES option P'

(Epreuve commune aux ENS de Lyon, Ulm et Cachan)

(durée : 4 heures)

Les trois premières parties sont indépendantes. La quatrième partie utilise uniquement les résultats énoncés dans la dernière question de chacune des trois premières parties. En conséquence, les candidats peuvent aborder chaque partie quand ils le désirent, et dans un ordre indifférent. Les définitions et commentaires intéressant plusieurs questions sont précédés et suivis de carrés noirs : ■ ... ■.

Pour tout entier $n \geq 3$, on désigne par d_n le plus petit multiple commun des entiers $2, 3, \ldots, n$: ainsi $d_6 = 60$.

On note S_3 la somme de la série convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

I

On définit une suite d'entiers strictement croissante $(a_k)_{k\in \mathbb{N}^*}$ par :

$$a_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^* : \ a_{k+1} = a_k^2 - a_k + 1.$$

I-1-a Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a : $\quad 2^{2^{k-2}} + 1 \leq a_k \leq 2^{2^{k-1}}$.

I-1-b En déduire que pour tout entier $k \geq 7$ on a :

$$\frac{1}{a_k} \ln a_k \leq \frac{1}{2^{19+k}}.$$

I-2-a Montrer que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_i} \ln a_i$ est convergente, et calculer sa somme à 10^{-5} près.

I-2-b. En déduire un majorant w avec trois décimales aussi petit que possible de la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^* : w_k = \prod_{i=1}^{k} a_i^{1/a_i}.$$

I-3 Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1 - \frac{1}{a_{k+1}-1}.$$

■ Pour tout réel $x > 0$, on désigne par $[x]$ la partie entière de x : ainsi $[\pi] = 3$.
On fixe désormais un entier $n \geq 3$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $a_k \leq n < a_{k+1}$. On désigne par C(n) le nombre :

$$C(n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n}{a_i}\right]!\right)}.$$

On <u>admet</u> que pour tous entiers ℓ, m supérieurs ou égaux à 2, si $m_1, \ldots, m_\ell$ sont des entiers naturels tels que $m_1 + \ldots + m_\ell = m$, et $t_1, \ldots, t_\ell$ sont des variables réelles, le coefficient de $\prod_{i=1}^{\ell} t_i^{m_i}$ dans le développement de $(t_1 + \ldots + t_\ell)^m$ est un entier égal à :

$$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{\ell}(m_i!)}$$ (formule du multinôme). ■

I-4-a Montrer que C(n) est un entier.

I-4-b Etablir que l'on a :

$$C(n) \leq \frac{n^n}{\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]^{[n/a_i]}}.$$

I-5-a Montrer que si a et n sont des entiers tels que $0 < a \leq n$ alors :

$$\frac{\left(\frac{n}{a}\right)^{n/a}}{\left[\frac{n}{a}\right]^{[n/a]}} \leq \left(\frac{en}{a}\right)^{(a-1)/a} ;$$

on pourra minorer $[\frac{n}{a}]$ par $\frac{n-a+1}{a}$.

I-5-b En déduire que l'on a : $C(n) \leq n^{k+1} e^k w^n$;

on rappelle que w a été défini au I.2.b, et que l'entier $k \in \mathbb{N}^*$ est tel que $a_k \leq n < a_{k+1}$.

I-6-a Soit p un nombre premier inférieur ou égal à n. On note $q = [\frac{\ell n\ n}{\ell n\ p}]$ le plus grand entier j tel que $p^j \leq n$. Montrer que pour tout entier $m \in \{1, ..., n\}$, la puissance de p en facteur dans m! est exactement d'exposant $\sum_{j=1}^{q} [\frac{m}{p^j}]$. On pourra dénombrer les multiples de p, de p^2, ... inférieurs ou égaux à m.

I-6-b En déduire la puissance de p en facteur dans C(n).

I-6-c A l'aide du I-3, établir que pour tout réel $x \geq 1$ on a :

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^{k} [\frac{x}{a_i}] < [x] ;$$

On pourra montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ on a : $[\frac{x}{a}] = [\frac{[x]}{a}]$.

I-6-d En déduire que C(n) est un multiple de d_n.

I-7 Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 : d_n \leq 3^n.$$

II

Soit K le compact $[0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction définie et continue sur K, à valeurs réelles ; son intégrale double sur K est :

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx.$$

II-1-a Montrer que les expressions :

$$\int_0^\alpha \left(\int_0^1 f(x,y)\,\ell n\, x \, dy \right) dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\int_0^\alpha f(x,y)\,\ell n\, x \, dx \right) dy$$

ont un sens pour tout $\alpha \in \,]0,1[$, et qu'elles tendent vers 0 quand α tend vers 0.

I-1-b En déduire que les deux expressions :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\ell n\, (xy) \, dy \right) dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\ell n\, (xy) \, dx \right) dy$$

ont un sens, et qu'elles sont égales.

On notera désormais $\iint_K f(x,y)\,\ell n\,(xy)\,dx\,dy$ la valeur commune de ces expressions.

II-2-a On définit une fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(t) = \dfrac{-t\,\ell n\, t}{1-t}$. Déterminer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ pour que φ soit définie, continue et positive sur $[0,1]$.

II-2-b En déduire que la fonction Φ définie par $\Phi(x,y) = \dfrac{-xy\,\ell n(xy)}{1-xy}$ peut être prolongée en une fonction définie, continue et positive sur K, que l'on notera encore Φ.

II-3 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note : $I_k(f) = -\iint_K f(x,y)\,x^k y^k\,\ell n(xy)\,dx\,dy$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} I_k(f)$ est convergente, et que sa somme est égale à $\iint_K f(x,y)\,\Phi(x,y)\,dx\,dy$.

■ En rajoutant $I_0(f)$ aux deux membres, on obtient la relation :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_k(f) = -\iint_K \frac{f(x,y)\,\ell n\,(xy)}{1-xy}\,dx\,dy,$$

où l'intégrale double peut être calculée dans un ordre indifférent ; on notera J(f) la valeur commune de cette série et de cette intégrale double.

Désormais on fixe un entier $n \geq 3$. ■

II-4 Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose : $f_{p,q}(x,y) = x^p y^q$.

II-4-a Calculer $I_k(f_{p,q})$ pour tout $(k,p,q) \in \mathbb{N}^3$.

II-4-b Montrer que pour tout $p \in \{0, 1, ..., n\}$ il existe deux entiers relatifs $b_{n,p}$ et $c_{n,p}$ tels que :

$$J(f_{p,p}) = \frac{b_{n,p} + c_{n,p} S_3}{d_n^3}.$$

II-4-c Montrer que pour tous $p,q \in \{0, 1, ..., n\}$ tels que $p \neq q$, il existe un entier relatif $b_{n,p,q}$ tel que : $J(f_{p,q}) = \dfrac{b_{n,p,q}}{d_n^3}$.

II-5 On désigne par L_n le n-ième polynôme de Legendre sur [0,1] défini par :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n (1-x)^n) ;$$

autrement dit, $n!\, L_n(x)$ est la dérivée n-ième de $x^n(1-x)^n$.

II-5-a Calculer explicitement L_n et vérifier que tous ses coefficients sont entiers.

II-5-b On pose $F_n(x,y) = L_n(x) L_n(y)$ et $J_n = J(F_n)$. Montrer qu'il existe deux entiers relatifs b_n et c_n tels que :

$$J_n = \frac{b_n + c_n S_3}{d_n^3}.$$

III

On désigne par K le compact $[0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$, et par Q le compact $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$. Si f est une fonction définie et continue sur K, à valeurs réelles, on a clairement :

$$J(f) = \iint_K \frac{f(x,y)\, \ell n(xy)}{1-xy}\, dx\, dy = \iint_K \left(\int_0^1 \frac{f(x,y)}{1-(1-xy)u}\, du \right) dx\, dy ;$$

on notera $\iiint_Q \dfrac{f(x,y)}{1-(1-xy)u}\, dx\, dy\, du$ cette intégrale triple, et on admettra que dans celle-ci ainsi que dans celles qui interviennent dans cette partie, on peut effectuer les intégrations dans un ordre indifférent.

Avec les notations du II.5, on a donc pour tout entier $n \geq 3$:

$$J_n = \iiint_Q \frac{L_n(x)\, L_n(y)}{1-(1-xy)u}\, dx\, dy\, du,$$

où $L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n (1-x)^n)$ désigne le n-ième polynôme de Legendre sur [0,1].

III-1 Montrer qu'en effectuant successivement :

- n intégrations par parties par rapport à x ;
- le changement de variable $z = z(u) = \dfrac{1-u}{1-(1-xy)u}$ à x et y fixés ;
- n intégrations par parties par rapport à y,

on obtient :

$$J_n = \iiint_Q \frac{x^n y^n z^n (1-x)^n (1-y)^n (1-z)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dx\, dy\, dz.$$

III-2-a On définit une fonction γ sur $[0,1] \times [0,1]$ par :

$$\gamma(s,t) = \frac{st}{s+t-st} \text{ si } (s,t) \in [0,1] \times [0,1],\ (s,t) \neq (0,0) \text{ ; } \gamma(0,0) = 0.$$

Montrer que γ est définie et continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

III-2-b En déduire que la fonction g définie sur Q par :

$$g(x,y,z) = \frac{xyz\,(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)\,z} \text{ si } (x,y,z) \in Q,\ (xy, z) \neq (0,1) \text{ ;}$$

$$g(x,y,z) = 0 \text{ si } xy = 0 \text{ et } z = 1,$$

est continue et positive sur Q, et nulle sur la frontière de Q.

III-3-a Montrer que g admet un unique point critique à l'intérieur de Q.

III-3-b Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ on a : $0 < J_n \leq (\sqrt{2}-1)^{4n} J_0$.

IV

Montrer que S_3 est irrationnel.