ENS 1997, Option PC

Les hypothèses ($\mathcal{H}$) et les notations importantes apparaissent en gras dans le texte, elles sont valables à partir du moment où elles sont formulées et jusqu'à la fin du problème. Un cas particulier sera étudié tout au long du problème. Les notations générales s'appliquent évidemment au cas particulier. Les questions qui ne concernent que ce cas particulier sont ► entre… ◄ et elles sont de deux natures : soit vérifier que les hypothèses faites dans le cadre général sont satisfaites dans l'exemple ou bien établir directement (essentiellement par des résultats en lien avec les séries de Fourier) les résultats qui seront prouvés, par la suite et par d'autres méthodes, dans le cadre général.
Toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Partie I

$[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, p_0, p_1, et p_2 sont des fonctions continues sur $[a,b]$.

($\boldsymbol{\mathcal{H}_0}$) On suppose que $\boldsymbol{p_0}$ ne s'annule pas sur $\boldsymbol{[a,b]}$.

On considère l'équation différentielle (E) et les conditions à la frontière (fr) :

(E) $$\mathbf{p_0(t)y''(t)+p_1(t)y'(t)+p_2(t)y(t)=0}$$

(fr) $$\mathbf{y(a)=y(b)=0}$$

Dans les questions repérées par ► … ◄ on examinera le cas particulier suivant :

$$\mathbf{a=0,\ b=\pi,\ p_0(t)=1,\ p_1(t)=0 \text{ et } \forall t\in[a,b],\ p_2(t)=-1}\ .$$

1°) ► Trouver, dans le cadre de l'exemple, toutes les solutions de (E) vérifiant (fr). ◄

($\boldsymbol{\mathcal{H}_1}$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que la seule solution sur $\boldsymbol{[a,b]}$ de $\boldsymbol{(E)}$ vérifiant $\boldsymbol{(fr)}$ est la fonction nulle.

2°) a) Justifier l'existence de deux solutions de (E) sur $[a,b]$, notées Y_1 et Y_2 ,vérifiant les conditions :

$$Y_1(a)=0,\ Y_1'(a)=1 \text{ et } Y_2(b)=0,\ Y_2'(b)=1.$$

b) Montrer que le système (Y_1,Y_2) forme un système fondamental de solutions de (E).

$\boldsymbol{f}$ étant continue sur $\boldsymbol{[a,b]}$, on considère l'équation différentielle

$(E)_f$ $$p_0(t)y''(t)+p_1(t)y'(t)+p_2(t)y(t)=f(t)$$

3°) a) Montrer qu'il existe, sur $[a,b]$, une et une seule solution h de $(E)_f$ vérifiant (fr).
b) Trouver une fonction G, continue sur $[a,b]^2$, telle que pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, la solution h de $(E)_f$ vérifiant (fr) puisse s'exprimer sous la forme :

$$h(t)=\int_a^b G(t,x)f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Indication : On pourra appliquer la méthode de variation des constantes et exprimer la fonction G, sous des formes différentes selon que $x<t$ ou $x>t$, à l'aide notamment du wronskien de (Y_1,Y_2).

L'expression de G est utile pour les questions I-4, IV-2-a et IV-2-b.

($\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que $\boldsymbol{p_0}$ est dérivable sur $\boldsymbol{[a,b]}$ et que, pour tout $\boldsymbol{t\in[a,b],\ p_0'(t)=p_1(t)}$.

4°) Montrer que pour tout $(t,x)\in[a,b]^2$, on a : $G(t,x)=G(x,t)$.

Partie II

On considère les espaces vectoriels :
$\mathbf{E_{a,b}}=\{h:[a,b]\to\mathbb{R}\ /\ h$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et vérifiant $(fr)\}$
$\mathbf{F_{a,b}}=\{\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}\ /\ \varphi$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ et vérifiant $(fr)\}$
$\mathbf{C_{a,b}}=\{g:[a,b]\to\mathbb{R}\ /\ g$ de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]\}$
Ce dernier espace sera muni du produit scalaire défini par $(f|g)=\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
On considère aussi les deux applications linéaires suivantes :

$$\mathbf{L}:\begin{cases}\mathbf{E_{a,b}} & \to & \mathbf{C_{a,b}}\\ h & \mapsto & \Big(t\mapsto p_0(t)h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\Big)\end{cases}$$

$$\mathbf{I}:\begin{cases}\mathbf{C_{a,b}} & \to & \mathbf{E_{a,b}}\\ f & \mapsto & \Big(t\mapsto \displaystyle\int_a^b G(t,x)f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\end{cases}$$

1°) a) Vérifier que $\mathbf{I}$ est bien à valeurs dans $\mathbf{E_{a,b}}$.
b) Montrer que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{I}$ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. En déduire que pour $h\in\mathbf{E_{a,b}}$ et λ réel on a l'équivalence

$$\mathbf{L}(h)=\lambda h \iff h=\lambda\mathbf{I}(h)\ .$$

Il est abusif de parler de valeur propre et de fonction propre pour $\mathbf{L}$ puisqu'il ne s'agit pas d'un endomorphisme, mais nous le ferons quand même !

S'il existe h non nulle dans $\mathbf{E_{a,b}}$ telle que $L(h)=\lambda h$, on dira que λ est une valeur propre de L et h est une fonction propre associée à λ.

On rappelle que nous avons supposé en ($\boldsymbol{\mathcal{H}_1}$) que 0 n'est pas valeur propre de L.

2°) ► Déterminer, dans le cadre de l'exemple, les valeurs propres de $\mathbf{L}$ ainsi que les fonctions propres associées. ◄

3°) a) Montrer que pour toute valeur propre λ de $\mathbf{L}$ le « sous-espace propre de $\mathbf{L}$ associé à λ », c'est-à-dire $\{h \in \mathbf{E_{a,b}} \ / \ \mathbf{L}(h) = \lambda h\}$, est de dimension 1.

($\mathcal{H}_3$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que les valeurs propres de L forment, comme dans l'exemple, une suite indexée par $\mathbb{N}*$, notée $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On fixera H_n une fonction propre de L associée à λ_n qui vérifie en outre : $\displaystyle\int_a^b H_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b) Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale pour le produit scalaire de $\mathbf{C_{a,b}}$, c'est-à-dire que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^*2$ on a :

$$\int_a^b H_n(t)H_m(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{nm} \quad \text{(symbole de Kronecker)}\ .$$

Indication : On pourra calculer une intégrale double par intégrations successives, de deux manières différentes, en utilisant le théorème de Fubini.

4°) ► Dans le cadre de l'exemple, expliciter H_n, et montrer que la seule fonction de $\mathbf{C_{0,\pi}}$ vérifiant (fr) et qui soit orthogonale pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à tous les H_n est la fonction nulle. ◄

($\mathcal{H}_4$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que la propriété analogue est vraie dans le cadre général : la seule fonction f de $\mathbf{C_{a,b}}$ vérifiant (fr) et telle que pour tout H_n, $\displaystyle\int_a^b H_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ est la fonction nulle.

Partie III

($\mathcal{H}_5$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que pour tout $t \in [a,b]$, $p_0(t) > 0$, $p_2(t) \leqslant 0$ et que p_2 n'est pas la fonction nulle. On pose pour tout $\varphi \in \mathbf{F_{a,b}}$:

$$N(\varphi) = \left(\int_a^b (p_0(x)\varphi'^2(x) - p_2(x)\varphi^2(x))\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} .$$

1°) a) Justifier l'existence de cette intégrale et montrer que N est une norme associée à un produit scalaire sur $\mathbf{F_{a,b}}$ pour lequel on utilisera la notation $<\varphi|\psi>$.

b) Établir que pour tout $h \in \mathbf{E_{a,b}}$ et tout $\varphi \in \mathbf{F_{a,b}}$ on a :

$$<h|\varphi> = -(\mathbf{L}(h)|\varphi)\ .$$

c) En déduire la valeur, pour $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$ de $<H_n|H_m>$ ainsi que le signe des valeurs propres de $\mathbf{L}$.

Pour tout $f \in \mathbf{C_{a,b}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\gamma_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(u)H_n(u)\,\mathrm{d}u$.

2°) Soit $\varphi \in \mathbf{F_{a,b}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $R_n(\varphi) = \varphi - \sum\limits_{k=1}^{k=n} \gamma_k(\varphi)H_k$.

a) Montrer que $N(R_n(\varphi))^2 = N(\varphi)^2 + \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lambda_k(\gamma_k(\varphi))^2$.

b) En déduire que la série numérique $\sum \lambda_k(\gamma_k(\varphi))^2$ converge.

Partie IV

1°) ► φ étant un élément de $\mathbf{F}_{0,\pi}$, montrer dans le cadre de l'exemple que pour tout $t \in [0,\pi]$ l'on a $\varphi(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(\varphi)H_n(t)$ et que la convergence de cette série de fonctions est uniforme sur $[0,\pi]$. ◄

On note, pour tout $t \in [a,b]$, $\Phi_t(x) = G(t,x)$.

2°) a) Vérifier que l'application Φ_t ainsi définie appartient à $\mathbf{F_{a,b}}$. L'application Φ_t est-elle dérivable au point t?

b) Montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout $t \in [a,b]$ on ait : $N(\Phi_t)^2 \leqslant M$. En deduire que pour tout $t \in [a,bJ$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|(\gamma_k(\Phi_t))^2 \leqslant M$.

3°) Trouver, pour tout $t \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $H_n(t)$ et $\gamma_n(\Phi_t)$.

4°) a) φ étant toujours un élément de $\mathbf{F_{a,b}}$, prouver que la série de fonctions $\sum \gamma_n(\varphi)H_n(t)$ converge uniformément sur $[a,b]$.

b) Montrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $\varphi(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(\varphi)H_n(t)$.

5°) a) Établir, pour tout $(t,x) \in [a,b]^2$, la formule : $G(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{H_n(t)H_n(x)}{\lambda_n}$.

b) ► Montrer, dans le cadre de l'exemple, que la convergence de cette dernière série de fonctions de deux variables est uniforme sur le carre $[0,\pi]^2$ (c'est-à-dire que l'on a convergence au sens de la norme $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(t,x)| \ / \ (t,x) \in [0,\pi]^2\}$ dans l'espace des fonctions continues sur $[0,\pi]^2$. ◄

Pour prouver, dans le cadre général, cette convergence uniforme sur le carre $[a,b]^2$, on utilisera, sans le démontrer, le **Théorème de Dini** :

Soit (g_n) est une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[a,b]$,
pour tout $t \in [a,b]$, la suite numérique $(g_n(t))$ est croissante,
la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction g continue sur $[a,b]$.
Alors (g_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

6°) a) Montrer dans un premier temps, la convergence uniforme sur le segment $[a, b]$ de la série de fonctions d'une seule variable :

$$\sum \frac{(H_n(x))^2}{\lambda_n}$$

b) En déduire la convergence uniforme sur le carré $[a, b]^2$ de la série

$$\sum \frac{H_n(x)H_n(t)}{\lambda_n}$$

7°) Montrer que si $f \in \mathbf{C_{a,b}}$, on peut exprimer h, la solution de $(E)_f$ vérifiant (fr), à l'aide des fonctions H_n et des nombres $\gamma_n(f)$.