ENS PC 1998

Le problème aborde quelques aspects de la théorie des polynômes orthogonaux. La première partie introduit une famille de polynômes comme étant des « vecteurs propres », la deuxième partie adapte à cette famille un produit scalaire afin d'en faire des « polynômes orthogonaux ». La troisième partie donne d'autres moyens (formule de Rodrigues et fonctions génératrices) d'obtenir ces polynômes. La dernière partie, largement indépendante de la troisième, aborde, dans le cas particulier des polynômes de Laguerre, la question de la convergence en moyenne quadratique.

Partie I : Étude algébrique

Dans cette partie on introduit les polynômes Π_n, comme étant des « vecteurs propres » d'un endomorphisme.
$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace des polynômes de degré au plus n. A et B étant les deux polynômes suivants :

$$A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \quad \text{et} \quad B = \beta_1 X + \beta_0$$

on note pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\mathcal{L}(P) = AP'' + BP'$$

(ces notations sont valables dans tout le problème)
1°) Montrer que $\mathcal{L}$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, et qu'il induit par restriction, pour tout entier n, un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2°) Dans cette question, $\mathcal{L}$ sera considéré comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
a) Écrire la matrice de $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de cet espace.
b) Vérifier que si

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$$

alors $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$ est diagonalisable.
3°) On examine, toujours dans $\mathbb{R}_2[X]$, quelques cas particuliers, obtenus en spécifiant A et B.
a) (polynômes de type « Hermite »). Ici $A = \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose que $\beta_1 \neq 0$.
Déterminer explicitement une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui diagonalise $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$.
b) (polynômes de type « Jacobi »). Ici $A = \alpha_2(X^2 - 1)$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose que $\beta_1 \neq 0$ et que $2\alpha_2 + \beta_1 = 0$.
Donner, dans ce cas. une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$ soit diagonalisable.
4°) On revient ici au cas général et on suppose que :

$$(i) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$$

On suppose jusqu'à la fin du problème que cette condition (i) est satisfaite.
a) Montrer que pour tout entier n, $\mathcal{L}$, considéré comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, est diagonalisable.
b) En déduire que pour tout entier n, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et au moins un polynôme Π_n de $\mathbb{R}[X]$, de degré n tel que : $\mathcal{L}(\Pi_n) = \lambda_n \Pi_n$. Préciser λ_n, et montrer que $\mathrm{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_n \, \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]})$ est de dimension 1.
c) La famille (Π_n) constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}[X]$?

À tout triplet (A, B, n) est donc associé un polynôme Π_n, défini à une constante multiplicative non nulle près. Cette notation est utilisée jusqu'à la fin du problème.

Partie II : Orthogonalité des polynômes Π_n

On se propose, dans trois cas particuliers, de mettre en place un produit scalaire qui fera de la famille (Π_n) une famille orthogonale.
1°) Si J est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et si ω est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans $\mathbb{R}_+^*$, on note :

$$H_\omega = \{f \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ continue sur } J \text{ et } \omega f^2 \text{ intégrable sur } J\}$$

(on notera parfois $J =]a, b[$, mais cet intervalle n'est pas nécessairement borné, on peut avoir $a = -\infty$ ou bien $b = +\infty$).
a) Montrer que H_ω est un espace vectoriel.
b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur H_ω en posant :

$$\forall (f, g) \in H_\omega^2, \quad (f|g) = \int_J \omega(t) f(t) g(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Dans la question suivante, on suppose que les polynômes, en tant que fonctions de $J =]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, sont des éléments de H_ω, A et B sont les deux polynômes définis dans la première partie.
2°) Si l'on suppose que

$$(ii) \qquad \forall x \in J, \quad \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\omega(x)\Big)A(x) + \omega(x)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\Big) = \omega(x)B(x)$$

$$(iii) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \omega(x) x^n A(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \omega(x) x^n A(x) = 0 \, ,$$

Montrer que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \neq m) \quad \Longrightarrow \quad \left(\int_a^b \omega(t) \Pi_n(t) \Pi_m(t) \, \mathrm{d}t = 0\right)$$

3°) On examine ici trois cas particuliers.

a) ("Hermite"). On a donc $A = \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose de plus que $\alpha_0\beta_1 < 0$. On pose :

$$J = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \omega(x) = \exp(\frac{B(x)^2}{2\alpha_0\beta_1})$$

Montrer que les polynômes sont des éléments de H_ω, et que les conditions (ii) et (iii) sont vérifiées.
b) ("Jacobi"). Ici l'expression de B est présentée sous une forme « plus agréable » :

$$B = (p+q+2)X + (p-q)$$

avec $p+1>0$ et $q+1>0$, celle de A est simplifiée : $A = X^2 - 1$. Déterminer ω, application de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que le couple $(]-1,1[,\omega)$ vérifie les conditions (ii) et (iii). Pour ce couple, les polynômes sont-ils dans H_ω ?
c) ("Laguerre"). On suppose ici que : $A = \alpha_1(X-\rho)$, où ρ est un réel et que $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose de plus que $\alpha_1\beta_1 < 0$. Déterminer une application ω de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\rho,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que (ii) soit réalisée. Trouver une condition portant sur le signe de $\dfrac{B(\rho)}{\alpha_1}$ pour que le couple $(]\rho,+\infty[,\omega)$ vérifie (iii).
Montrer que dans ce cas les polynômes sont des éléments de H_ω.

Partie III : Rodrigues et les fonctions génératrices

On se place ici dans le cas général, c'est à dire que A et B vérifient (i) (cf. **I.4**), on suppose que ω est une application de J dans $\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ et que le couple (J,ω) vérifie (ii) et (iii) (cf. **II.2**). On suppose aussi que les polynômes sont éléments de H_ω.
1°) a) Montrer que pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p \leqslant n$ la fonction ωA^n est p fois dérivable sur J et qu'il existe un polynôme $Q_{(n,p)}$, dont on précisera le degré, tel que

$$\forall x \in J, \quad \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}(\omega(x)(A(x))^n) = \omega(x)(A(x))^{n-p}Q_{(n,p)}(x)$$

b) Montrer que si $m \neq n$ alors :

$$(Q_{(n,n)}|\Pi_m) = 0$$

c) En déduire qu'il existe un lien entre le polynôme Π_n de la fin de la première partie et $Q_{(n,n)}$.
Ce lien constitue la formule de Rodrigues.
2°) ("Legendre", un cas de Hermite simplifié). Ici $A = -1$ et $B = 2X$. On prendra pour couple (J,ω) celui qui est donné en **II.3.(a)**. On pose $H_n = Q_{(n,n)}$.
a) Vérifier que :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)\,.$$

b) Établir l'égalité suivante

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n}(e^{-(x-t)^2}) = e^{-(x-t)^2}H_n(x-t)$$

c) En déduire la formule :

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

d) Calculer H_5.
3°) (« Laguerre » simplifié) On se place dans une situation du type **II.3(c)**, avec ici $A = X$ et $B = -X+1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note L_n le polynôme en x défini par

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$$

a) Dans ce cas, quel lien existe-t-il entre L_n et Π_n ?
(On peut poursuivre cette question **III.3** même sans avoir répondu à **III.a.**)
b) Établir la formule :

$$\forall x \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2}(x) + xL_{n+1}(x) = (2n+3)L_{n+1}(x) - (n+1)^2L_n(x)$$

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère la fonction F_x définie par :

$$F_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)t^n}{n!}$$

c) Montrer que le rayon de convergence, que l'on notera R_x, de la série entière qui définit F_x, est non nul.
d) Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre dont F_x est solution sur $]-R_x,R_x[$.
e) Déterminer $F_x(t)$ préciser la valeur de R_x.

Partie IV : Convergence quadratique

Dans cette partie on ne s'intéresse qu'au cas de Laguerre du **III.3**. Ici $J =]0,+\infty[$ et $\omega(x) = e^{-x}$. On note désormais N_ω la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)_\omega$.
On suppose que les polynômes Π_n sont choisis normés ($N_\omega(\Pi_n) = 1$) et que le coefficient de leur terme dominant est positif ; ainsi ils sont parfaitement déterminés.
1°) Calculer $N_\omega(L_n)$, et exprimer Π_n à l'aide de L_n.
2°) Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_m(x) = e^{-mx}$.

a) Calculer $(\varphi_m|\Pi_n)$, ainsi que $N_\omega(\varphi_m)$.
b) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\omega\left(\varphi_m - \sum_{k=0}^{n}(\varphi_m|\Pi_k)\Pi_k\right) = 0$$

c) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $\{\mu_m\}_{m\in[0,N]}$ une famille de réels, on considère :

$$\psi = \sum_{m=0}^{N}\mu_m\varphi_m$$

Vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\omega\left(\psi - \sum_{k=0}^{n}(\psi|\Pi_k)\Pi_k\right) = 0$$

3°) Soit g une fonction définie et continue sur $[0,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
a) Montrer que la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(0) = 0$ et pour $u \neq 0$, $h(u) = g(-\ln(u))$ est continue sur $[0,1]$.
b) En déduire que

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists P \in \mathbb{R}[X]\ /\ \int_0^{+\infty} e^{-t}(g(t) - P(e^{-t}))^2\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2\ .$$

4°) Montrer que pour toute $f \in H_\omega$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g_f continue sur $[0,+\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} g_f(x) = 0$ et telle que $N_\omega(f - g_f) \leqslant \varepsilon$.
5°) Montrer que pour toute $f \in H_\omega$, la série

$$\sum_n (f|\Pi_n)\Pi_n$$

converge vers f pour la norme N_ω.