

SESSION 2003

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

5

Tournez la page S.V.P.

Les définitions importantes sont signalées par un signe \sim . Les résultats admis sont encadrés par des \bullet . Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et tout entier naturel k , on note simplement $\mathcal{C}^k(I) = \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I et à valeurs réelles. L'espace des fonctions continues, $\mathcal{C}^0(I)$, est noté $\mathcal{C}(I)$. Si I est un intervalle fermé $[a, b]$, on note de plus $\mathcal{C}_0(I)$ l'espace des fonctions continues sur I s'annulant en a et en b , et $\mathcal{C}_0^k(I)$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I , nulles en a et en b ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k . De façon analogue, $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} admettant des limites nulles en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k .

Dans tout le problème, E est une fonction à valeurs réelles de deux variables réelles, notées q et p , et E est supposée au moins de classe \mathcal{C}^3 , c'est-à-dire $E \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les dérivées partielles premières de E sont ainsi notées

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q, p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial p}(q, p),$$

et les dérivées partielles secondes de E

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(q, p), \quad \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(q, p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(q, p).$$

Le problème concerne la minimisation de l'intégrale

$$\int_I E(\rho(x), \rho'(x)) dx$$

pour ρ appartenant à un ensemble \mathcal{A} de fonctions admissibles à préciser (inclus dans $\mathcal{C}^1(I)$).

I Résultats préliminaires

1 Un lemme fondamental

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$, et

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b]) = \{ h \in \mathcal{C}^1([a, b]); h(a) = h(b) = 0 \}.$$

i)

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telles que, pour tout $h \in \mathcal{B}$,

$$\int_a^b f(x) h'(x) dx = 0.$$

Indication : On pourra utiliser des fonctions h de la forme

$$h(x) = \int_a^x (f(x) - c) dx$$

ii)

Déterminer, en utilisant i), l'ensemble des couples $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ tels que, pour tout $h \in \mathcal{B}$,

$$\int_a^b (f(x) h(x) + g(x) h'(x)) dx = 0.$$

Parmi ces couples, peut-on avoir $g(x) = |x - (a+b)/2|$?

2 Mesure des courbes et surfaces

i)

On considère un arc de courbe défini par une équation cartésienne,

$$\Gamma = \{ (x, \varphi(x)); x \in [a, b] \},$$

avec $a < b$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Quelle est la longueur de l'arc Γ ?

ii)

Soient $\alpha \in]0, 2\pi[$ et $R > r > 0$. Quelle est l'aire de

$$S = \{ (\rho \cos \omega, \rho \sin \omega); r \leq \rho \leq R \text{ et } 0 \leq \omega \leq \alpha \} ?$$

iii)

On suppose que l'arc Γ défini en i) ne coupe pas l'axe Ox et on considère Σ la surface de révolution obtenue par rotation de Γ autour de cet axe.

• On admet que l'aire de Σ est égale à

$$A = 2\pi \int_a^b \varphi(x) \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \quad \bullet$$

Vérifier cette formule dans le cas où Γ est un segment de droite. On pourra s'aider d'un dessin, et utiliser ii).

Tournez la page S.V.P.

3 Méthode de séparation des variables

Soient I et J des intervalles de \mathbb{R} . On suppose que $G \in \mathcal{C}^1(J)$ ne s'annule pas. Soient $a \in I$, $\alpha \in J$, et $\rho \in \mathcal{C}^1(I, J)$ telle que $\rho(a) = \alpha$ et

$$\rho'(x) = G(\rho(x))$$

pour tout $x \in I$. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\rho(x)} \frac{dr}{G(r)}.$$

II Minimisation sur un intervalle I borné

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Comme dans la partie I, on notera

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b]).$$

À toute fonction $\rho \in \mathcal{C}^1([a, b])$ on associe le nombre réel

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_a^b E(\rho(x), \rho'(x)) dx.$$

1

Soient ρ et $h \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On considère $e_{\rho, h}$, la fonction d'une variable réelle t définie par

$$e_{\rho, h}(t) = \mathcal{E}[\rho + t h].$$

Montrer que $e_{\rho, h} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et exprimer ses dérivées en 0

$$\frac{de_{\rho, h}}{dt}(0) \text{ et } \frac{d^2e_{\rho, h}}{dt^2}(0)$$

à l'aide de ρ, ρ', h, h' et des dérivées partielles de E .

2

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\rho \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $\rho(a) = \alpha, \rho(b) = \beta$, réalisant le minimum de $\mathcal{E}[\rho]$ sous cette contrainte, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}[\rho] = \min_{\eta \in \mathcal{A}} \mathcal{E}[\eta], \quad \text{où } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \eta \in \mathcal{C}^1([a, b]); \eta(a) = \alpha, \eta(b) = \beta \}. \quad (1)$$

i)

Soit $h \in \mathcal{B}$. Quelle est alors la valeur de

$$\frac{de_{\rho, h}}{dt}(0) \quad ?$$

ii)

Déduire de ce qui précède que la fonction

$$x \in [a, b] \mapsto \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))$$

est de classe \mathcal{C}^1 et telle que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x)) \right) = \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x)) \quad (2)$$

pour tout $x \in [a, b]$.

↪ Désormais, on appelle **extrémale** de \mathcal{E} toute fonction $\rho \in \mathcal{A}$, au moins de classe \mathcal{C}^2 , telle que l'équation (2) soit satisfaite pour tout $x \in [a, b]$.

iii)

Soit ρ une extrémale de \mathcal{E} . Calculer

$$E(\rho(b), \rho'(b)) - \rho'(b) \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(b), \rho'(b)) - E(\rho(a), \rho'(a)) + \rho'(a) \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(a), \rho'(a)).$$

3

On se place dans le même cadre qu'à la question **2** ci-dessus, en supposant que (1) a lieu pour ρ de classe \mathcal{C}^2 .

i)

Soit $h \in \mathcal{B}$. Quel est le signe de

$$\frac{d^2 e_{\rho, h}}{dt^2}(0) \quad ?$$

ii)

Déduire de ce qui précède que, pour tout $h \in \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b])$:

$$\int_a^b (P(x) h'(x)^2 + Q(x) h(x)^2) dx \geq 0, \quad (3)$$

avec

$$P(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(\rho(x), \rho'(x)), \quad Q(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(\rho(x), \rho'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x)) \right). \quad (4)$$

A quelle(s) classe(s) \mathcal{C}^k appartiennent P et Q ? On notera par la suite

$$\mathcal{Q}[h] = \int_a^b (P(x) h'(x)^2 + Q(x) h(x)^2) dx.$$

4 Exemples

i)

Dans cette question, on considère la fonction $E(q, p) = \sqrt{1 + p^2}$. A quoi correspond, en langage commun, le problème de minimisation de \mathcal{E} ? Trouver toutes les fonctions ρ satisfaisant l'équation (2). Montrer qu'il en existe une et une seule appartenant à l'ensemble \mathcal{A} et l'expliciter. Pour cette solution et les fonctions P, Q définies par (4), l'inégalité (3) est-elle satisfaite?

ii)

Dans cette question, on considère la fonction $E(q, p) = q \sqrt{1 + p^2}$. A quoi correspond le problème de minimisation de \mathcal{E} ? Montrer que, si ρ satisfait (2), il existe une constante C telle que

$$\rho'(x)^2 = \frac{\rho(x)^2 - C^2}{C^2}. \quad (5)$$

Supposons $C^2 < \alpha < \beta$. Montrer, en utilisant la méthode de séparation de variables de la question I.**3**, que la recherche de fonctions $\rho \in \mathcal{A}$, strictement croissantes et satisfaisant (5) sur $[a, b]$, se ramène au calcul de la primitive d'une fonction que l'on explicitera.

NB : le calcul de la primitive n'est pas demandé.

Tournez la page S.V.P.

5 Étude de $\mathcal{Q}[h]$

On cherche ici des conditions sur les fonctions P et Q assurant l'inégalité (3) c'est-à-dire, avec la notation introduite à la question [3].ii),

$$\mathcal{Q}[h] \geq 0 \quad \text{quel que soit } h \in \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b]). \quad (6)$$

i)

Montrer que (6) implique

$$P(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b]. \quad (7)$$

Indication : on pourra construire une famille de fonctions auxiliaires $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^1([-\varepsilon, \varepsilon])$, où $\varepsilon > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers 0, telles que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(x)^2 dx \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g'_\varepsilon(x)^2 dx \geq \frac{C}{\varepsilon},$$

pour un certain $C > 0$ indépendant de ε .

ii)

Supposons qu'il existe une fonction $w \in \mathcal{C}^1([a, b])$ satisfaisant

$$P(x)(Q(x) + w'(x)) = w(x)^2 \quad (8)$$

pour tout $x \in [a, b]$. A-t-on alors (6) ? (On pourra interpréter (8) comme l'annulation du discriminant d'une forme quadratique.)

iii) Étude de l'équation (8)

On suppose ici

$$P(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Étant donné $w \in \mathcal{C}^1([a, b])$, une solution u de l'équation différentielle du premier ordre

$$P u' + w u = 0$$

peut-elle s'annuler? Si une telle solution u est de classe \mathcal{C}^2 , exprimer $(P u)'$ sans utiliser u' .

On suppose qu'il existe une solution v de classe \mathcal{C}^2 de l'équation différentielle du second ordre

$$-(P v)' + Q v = 0 \quad (9)$$

ne s'annulant pas sur $[a, b]$. Construire alors $w \in \mathcal{C}^1([a, b])$ vérifiant (8) pour tout $x \in [a, b]$.

III Minimisation sur un intervalle I infini

Dans toute cette partie, la fonction E est choisie de la forme

$$E(q, p) = F(q) + \frac{1}{2} K(q) p^2, \quad (10)$$

où les fonctions F et $K \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ satisfont les propriétés supplémentaires

$$K(q) \geq K_0 > 0 \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(q) > 0 \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, \\ F(\alpha) = F(\beta) = 0, \quad \frac{dF}{dq}(\alpha) = \frac{dF}{dq}(\beta) = 0, \\ \frac{d^2F}{dq^2}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2F}{dq^2}(\beta) > 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

On suppose pour fixer les idées $\alpha < \beta$.

1 Préambule

i)

Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale de degré 4 et de coefficient dominant 1 satisfaisant (12).

ii)

Pour tout nombre $\theta > 0$, on définit $\mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions $\rho \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} \rho(x) - \alpha = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{lorsque } x \rightarrow -\infty, \\ \rho(x) - \beta = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{lorsque } x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (13)$$

Montrer que, si $\rho \in \mathcal{A}_\theta^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $x \mapsto E(\rho(x), \rho'(x))$ est intégrable sur \mathbb{R} . Dans ce cas on définit

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\rho(x), \rho'(x)) dx.$$

~> Par extension de la définition donnée à la question II.2.ii), on appelle extrémale de \mathcal{E} une fonction ρ appartenant à $\mathcal{A}_\theta^2(\mathbb{R})$ pour au moins un nombre $\theta > 0$ et satisfaisant (2) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

iii)

Montrer que pour toute extrémale de \mathcal{E} , on a

$$\frac{1}{2} K(\rho(x)) \rho'(x)^2 = F(\rho(x)) \quad (14)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Étude de l'équation (14)

i) Exemple

On suppose dans cette question que K est la fonction constante égale à K_0 et F est la fonction polynomiale de la question 1.i) ci-dessus. En s'inspirant de la méthode de séparation de variables de la question I.3, calculer ρ satisfaisant (14) et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = \beta.$$

Déterminer les couples (θ, k) pour lesquels $\rho \in \mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$.

ii)

On revient au cas général. Montrer qu'il existe une fonction $G \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R}^+)$ telle que

$$G(q)^2 = \frac{2F(q)}{K(q)}$$

pour tout $q \in [\alpha, \beta]$. Montrer de plus que

$$\begin{cases} G(q) > 0 & \text{pour tout } q \in]\alpha, \beta[, \\ G(\alpha) = G(\beta) = 0, \\ \frac{dG}{dq}(\alpha) > 0 & \text{et} \quad \frac{dG}{dq}(\beta) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Tournez la page S.V.P.

- On admettra que (15) suffit pour construire $\rho \in \mathcal{A}_\theta^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} \rho'(x) = G(\rho(x)) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

avec

$$\theta < \min \left(\frac{dG}{dq}(\alpha), -\frac{dG}{dq}(\beta) \right),$$

quel que soit $\rho_0 \in]\alpha, \beta[$. •

À quels $\mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$ appartient cette fonction ρ ?

3

Désormais, ρ désigne une solution croissante de (14), construite grâce à la question **2**.ii) ci-dessus. On associe à ρ les fonctions P et Q comme dans la partie II, par les formules (4).

i)

Exprimer les fonctions P et Q à l'aide des fonctions K , F et ρ . Montrer que P et Q sont bornées sur \mathbb{R} , et que

$$P(x) \geq K_0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

ii)

Montrer que la fonction $v = \rho'$ est solution de l'équation différentielle (9) sur \mathbb{R} .

iii)

Montrer qu'il existe C_1 et $C_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| K(\rho(x)) \frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} \right| \leq C_1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dx} \left(K(\rho(x)) \frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} \right) \right| \leq C_2.$$

iv)

Soit $\omega > 0$. En s'inspirant des questions II.**5**.ii) et II.**5**.iii), montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (P(x) h'(x)^2 + Q(x) h(x)^2) dx \geq 0$$

pour tout $h \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} h(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) & \text{et} & h'(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) & \text{lorsque } x \rightarrow -\infty, \\ h(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) & \text{et} & h'(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) & \text{lorsque } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$