Liste des questions pouvant être liées :

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)
(13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)
(25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35)
(36, 37, 38, 39, 40)

Ce sujet comporte 40 questions, toutes obligatoires.

On considère l'équation bicarrée dans $\mathbb{C}$:

$$z^4 + 2a^2 z^2 (1 + \cos\theta)\cos\theta + a^4 (1 + \cos\theta)^2 = 0 \qquad (E)$$

où $a > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$.

On pose $Z = z^2$ et l'équation (E) devient (E_1).

Question n° 01 :

Le discriminant de (E_1) est un nombre

a) complexe (non réel).
b) réel strictement positif.

Une racine carrée de ce discriminant est

c) $2i \sin\theta \sin^2 \frac{\theta}{2}$.
d) $2 \sin\theta \cos^2 \frac{\theta}{2}$.

Question n° 02 :

Les deux solutions de (E_1) ont pour module

a) $2a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.
b) $-2a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$.
c) $a^2 (1 + \cos\theta)$.
d) $2a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$.

Question n° 03 :

Il existe une et une seule valeur de θ pour laquelle les deux solutions de (E_1) sont

a) réelles.
b) imaginaires pures.
c) distinctes et opposées.
d) égales.

Question n° 04 :

Si α désigne une solution de (E) alors

a) $i\alpha$.
b) $-\alpha$.
c) $\overline{\alpha}$.
d) $-i\alpha$.

sont aussi solution de (E).

Question n° 05 :

Les solutions de (E) ont

a) des modules différents.
b) même module de valeur $a\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}$.

Parmi les mesures des arguments des solutions de (E), on a

c) $\frac{\theta}{2}$ et $-\frac{\theta}{2}$.
d) $\frac{\theta + \pi}{2}$ et $\frac{\theta - \pi}{2}$.

Question n° 06 :

Il existe au moins une valeur de θ pour laquelle (E) possède

a) une solution d'ordre 4.

b) deux solutions distinctes d'ordre 2.

Dans le cas où l'équation (E) posséde quatre solutions distinctes alors deux de ces solutions sont

c) les conjuguées des deux autres.

d) les opposées des conjuguées des deux autres.

Question n° 07 :

La somme des racines de (E) est

a) $2a^2(1+\cos\theta)\cos\theta$.

b) $-2a^2(1+\cos\theta)\cos\theta$.

Le produit des racines de (E) est, pour une valeur au moins de θ,

c) a^4.

d) $-a^4$.

On considère les quatre nombres complexes

$$T_1 = i\cos\beta\, e^{i\beta},\ T_2 = -\overline{T_1}\ ,\ T_3 = -T_1 \text{ et } T_4 = \overline{T_1}\ ,$$

où $\beta = \dfrac{\theta}{2}$. On pose $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{4} T_k^n$. De plus, p désigne un entier naturel non nul.

Question n° 08 :

a) S'_{2p} est imaginaire pur.

b) S'_{2p} est réel.

c) $S'_{2p} = 2\,\Re e\left(T_1^{2p}\right)$.

d) $S'_{2p} = 2\,\Im m\left(T_1^{2p}\right)$.

On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{4} z_k^n$, $n \in \mathbb{N}$ avec z_k, où k=1,2,3,4, solutions de (E).

Question n° 09 :

Une solution de (E) est

a) $2a\,T_1$.

b) $ia\sqrt{2}\,T_1$.

La somme S_n est

c) $(2a)^n S'_n$.

d) $\left(a\sqrt{2}\right)^n S'_n$.

Question n° 10 :

a) $S_{2p+1} = 0$.

b) $S_{2p+1} > 0$.

c) $S_{2p} = a^{2p}\, 2^{2p+2}\,(-1)^p \cos^{2p}\dfrac{\theta}{2}\cos p\theta$.

d) $S_{2p} = a^{2p}\, 2^{p+2} \cos^{2p}\dfrac{\theta}{2}\sin p\theta$.

Question n° 11 :

S_2 a pour valeur

a) $-2\,S_1$.

b) $(S_1)^2$.

c) 0.

d) $-4\,a^2(1+\cos\theta)\cos\theta$.

Question n° 12 :

a) S_4 ne s'annule jamais quel que soit $\theta \in]0,\pi[$.

Dans le cas contraire, S_4 s'annule pour

b) une seule valeur.

c) deux valeurs complémentaires.

d) une infinité de valeurs.

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(x) + y^2(x) + \frac{\lambda}{x^2} = 0 \qquad (E)$$

définie sur $\mathcal{I} =]0, +\infty[$. λ est un paramètre réel.

Dans les deux questions suivantes, on suppose $\lambda = 0$.

Question n° 13 :

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathcal{I}$

a) contient la fonction nulle.

b) ne contient que la fonction nulle.

c) est un espace vectoriel.

d) est une droite affine.

Question n° 14 :

L'ensemble des solutions de (E)

a) contient toutes les fonctions $\left\{ x \to \dfrac{1}{x+A};\ A \in \mathbb{R} \right\}$.

b) ne contient les fonctions ci-contre que si et seulement si $A > 0$.

Soit y_0 solution de (E) dérivable sur $\mathcal{I}$ telle que $\lim\limits_{x \to 0^+} y_0(x) = -1$.

c) y_0 existe et est unique.

d) y_0 existe et n'est pas unique.

Dans les trois questions suivantes, on suppose $\lambda = -\dfrac{3}{4}$.

Question n° 15 :

Le changement de fonction inconnue $u(x) = x\,y(x)$ transforme l'équation différentielle (E) en une équation différentielle (E_1) de la forme

a) $u' + u^2 - \dfrac{3}{4x^2} = 0 \quad (u' = \dfrac{du}{dx})$.

b) $x\,u' - u + u^2 - \dfrac{3}{4} = 0$.

L'équation différentielle (E_1), à la fonction inconnue $u(x)$, est

c) linéaire.

d) du second ordre.

Question n° 16 :

a) Pour $u \neq -\dfrac{1}{2}$ et $u \neq \dfrac{3}{2}$ nous avons $\dfrac{4}{-4u^2 + 4u + 3} = \dfrac{1}{2u+1} + \dfrac{1}{2u-3}$.

Par séparation des variables dans (E_1) (à une constante multiplicative près)

b) $x = \left| \dfrac{2u+1}{2u-3} \right|$.

c) $x = \sqrt{\left| \dfrac{2u+1}{2u-3} \right|}$.

d) $x = \sqrt{|(2u+1)(2u-3)|}$.

Question n° 17 :

Une solution de (E) est

a) $y(x) = \dfrac{3x^2+1}{2(1-x^2)x}$.

b) $y(x) = -\dfrac{1}{2x}$.

c) Il existe des solutions de (E) classe C^1 sur $\mathcal{I}$.

d) Toutes les solutions de (E) sont continues sur $\mathcal{I}$.

Question n° 18 :

Le polynôme $P(x) = 3x^4 + 6x^2 - 1$ admet

a) quatre racines réelles distinctes.

b) Trois racines réelles et une complexe (non réelle).

c) quatre racines complexes (non réelles) distinctes.

d) deux racines réelles d'ordre 2.

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction définie par

$$v(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x(x^2 - 1)}$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé Oxy.

On pourra remarquer que v est une solution particulière de (E) pour $\lambda = -\frac{3}{4}$.

Question n° 19 :

$v'(x)$ est définie et négative sur

a) $[1, +\infty[$.

b) $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Sur l'intervalle $]0, 1[$ la fonction v

c) est strictement décroissante.

d) possède au moins un minimum.

Question n° 20 :

a) v est paire et Γ admet O pour centre de symétrie.

b) v est impaire et Γ admet l'axe Ox pour axe de symétrie.

c) Γ admet trois asymptotes.

d) Γ admet au moins deux asymptotes horizontales.

Sauf cas contraire dans les questions suivantes λ est un réel quelconque.

Question n° 21 :

Soit y_1 une solution particulière de (E) de la forme $y_1(x) = \frac{K}{x}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Il existe au moins une solution de cette forme

a) si et seulement si $\lambda = \frac{1}{4}$.

b) si $\lambda < \frac{1}{4}$.

c) pour tout λ réel.

d) si et seulement si $\lambda \geq \frac{1}{4}$.

$\mathcal{E}_i$ $(i = 1, 2)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe C^i sur $\mathcal{I}$.

Soit S le sous ensemble des fonctions de $\mathcal{E}_2$ qui vérifient l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) + \lambda y(x) = 0 \qquad (E')$$

où λ est un réel quelconque non nul.

Question n° 22 :

S n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}_2$ car

a) (E') n'est pas à coefficients constants.

b) la fonction nulle sur $\mathcal{I}$ n'appartient pas à S.

c) S est un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}_2$ car l'équation différentielle (E') est linéaire.

d) De manière générale, toute équation différentielle admettant pour solution particulière la fonction nulle est obligatoirement un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 1.

Question n° 23 :

Si y est un élément de S développable en série entière de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors nécessairement

a) $a_n = 0 \ \forall n \geq 2$.

b) $a_0 = a_1 = 0$.

Une telle solution, non nulle, existe si

c) $\lambda = -p(p-1)$ où $p \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.

d) $\lambda \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1, 2\}$.

Question n° 24 :

Pour f et z appartenant à $\mathcal{E}_1$, et y appartenant à $\mathcal{E}_2$, on pose

$$z' + z f = 0 \qquad (1)$$

$$y' - y f = z \qquad (2)$$

En dérivant (2) et en éliminant z' nous obtenons l'équation différentielle suivante, notée (E''), où ne figurent que y et f ainsi qu'éventuellement leurs dérivées successives:

a) $y'' + y\left(f' + f^2\right) = 0 \quad (E'')$.

b) $y'' + y\left(-f' - f^2\right) = 0 \quad (E'')$.

De plus, on aboutit à (E'') dans le cas où

c) y et f sont solutions de (E').

d) y est solution de (E') et f est solution de (E).

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{A} = [0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et la fonction g définie sur $\mathcal{B} =]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. On note $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Question n° 25 :

a) f est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

b) g est une surjection de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}$.

L'application $\varphi = f \, o \, g$ est

c) une bijection de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}$.

d) strictement croissante.

Question n° 26 :

Les équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$ admettent sur $\mathcal{B}$

a) une solution commune.

b) α pour solution commune.

c) α et $\dfrac{1}{\alpha}$ pour solutions communes.

d) deux solutions communes (distinctes).

Question n° 27 :

L'application $\psi = \varphi \, o \, \varphi$ est

a) strictement croissante sur $\mathcal{B}$ car φ est strictement croissante sur $\mathcal{B}$.

b) strictement décroissante sur $\mathcal{B}$ car φ est strictement décroissante sur $\mathcal{B}$.

c) une bijection de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}$.

d) une surjection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

Question n° 28 :

On considère l'inéquation

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-1}} > x \qquad (I)$$

L'inéquation (I) est équivalente à

a) $\psi(x) < x$.

b) $\varphi(x) > x$.

L'ensemble des solutions de (I) est

c) $]1, \alpha[$.

d) $]\alpha, +\infty[$.

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par le système

$$\begin{cases} u_{2n+1} &= f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} &= g(u_{2n+1}) \end{cases}.$$

Question n° 29 :

a) Au moins un des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'existe pas.

Dans le cas contraire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $u_{2n+1} > 1$.

c) $u_{2n+2} > 0$.

d) $u_{2n+2} < 0$.

Soit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de terme général

$$v_n = u_{4n+1} \quad n \geq 0.$$

Question n° 30 :

a) $v_0 < \alpha$.

b) $v_0 > \alpha$.

c) $v_1 < v_0$.

d) $v_1 > v_0$.

Question n° 31 :

Pour tout n

a) $v_{n+1} = \psi(v_n)$.

b) $v_{n+1} = \varphi(v_n)$.

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est

c) croissante.

d) décroissante.

Question n° 32 :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) $1 < v_n \leq \alpha$.

b) $v_n \geq \alpha$.

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente car

c) elle est décroissante et majorée par α.

d) elle est croissante et minorée par 1.

Question n° 33 :

La suite extraite $(u_{4n+2})_{n\geq 0}$ est

a) croissante.

b) monotone.

c) minorée par α.

d) majorée par $\dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Question n° 34 :

La suite extraite $(u_{4n+3})_{n\geq 0}$ est

a) croissante et minorée.

b) décroissante et minorée par 0.

c) convergente vers $\dfrac{1}{\alpha - 1}$.

d) divergente.

Question n° 35 :

La suite extraite $(u_{4n})_{n\geq 0}$

a) converge vers α.

b) converge vers $\dfrac{1}{\alpha+1}$.

En conclusion

c) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente car les suites extraites $(u_{4n+i})_{n\geq 0}$ $i = 0, 1, 2, 3$, convergent vers la même limite α.

d) L'assertion ci-dessus est une condition suffisante mais pas nécessaire. En effet il suffit que deux au moins des suites extraites $(u_{4n+i})_{n\geq 0}$ $i = 0, 1, 2, 3$, soient convergentes pour que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ le soit.

Soit l'espace vectoriel réel $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{E}$dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 8 & -3 \\ -6 & -7 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité et O la matrice nulle.

Question n° 36

Le polynôme caractéristique de A admet

a) trois zéros distincts réels.

b) un zéro réel double.

c) trois zéros distincts complexes (non réels).

d) un zéro réel et deux zéros complexes distincts conjugués.

Question n° 37 :

La matrice A est inversible car

a) 0 est une valeur propre.

b) son rang est 3.

Si l'on juge que A est inversible alors son inverse est

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -3 \\ -6 & -7 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -3 \\ -6 & -8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Question n° 38 :

a) A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car ses valeurs propres sont réelles et la dimension des sous espaces propres est égale à l'ordre de multiplicité des valeurs propres correspondantes.

b) A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car toutes les matrices d'ordre 3 à coefficient réels sont diagonalisables si et seulement si leur polynôme caractéristique admet des zéros réels.

Si l'on juge que A est diagonalisable alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. Il est possible d'avoir

c) $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $P = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -3 \\ -6 & -7 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Dans les deux questions suivantes, nous considérons la suite des matrices $(A^n)_{n\geq 1}$ et nous notons (sous réserve d'existence) L la limite de cette suite définie comme la matrice ayant pour coefficients les limites quand n tend vers $+\infty$ des coefficients correspondants de A^n.

Question n° 39 :

a) $\forall n \geq 1$ les matrices A^n ont les mêmes valeurs propres donc L admet ces mêmes valeurs propres.

b) $\forall n \geq 1$ les matrices A^n ont le même rang donc L aussi admet ce même rang.

c) $\forall n \geq 1$ les matrices A^n ont la même trace donc L aussi admet cette même trace.

d) Au moins une des trois assertions a), b) et c) précédentes est vraie car toutes les valeurs propres de A sont en valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Question n° 40 :

a) L n'existe pas car certains coefficients de A^n tendent vers l'infini.

Dans le cas contraire

b) $L = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

d) L admet pour valeurs propres 1 (double) et 0 (simple), ce qui était attendu car les valeurs propres de L sont les limites des valeurs propres de A^n lorsque $n \to +\infty$.