ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 1997**

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS
DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE

Durée : 4 heures

L'épreuve "Obligatoire" de Mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

ATTENTION IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

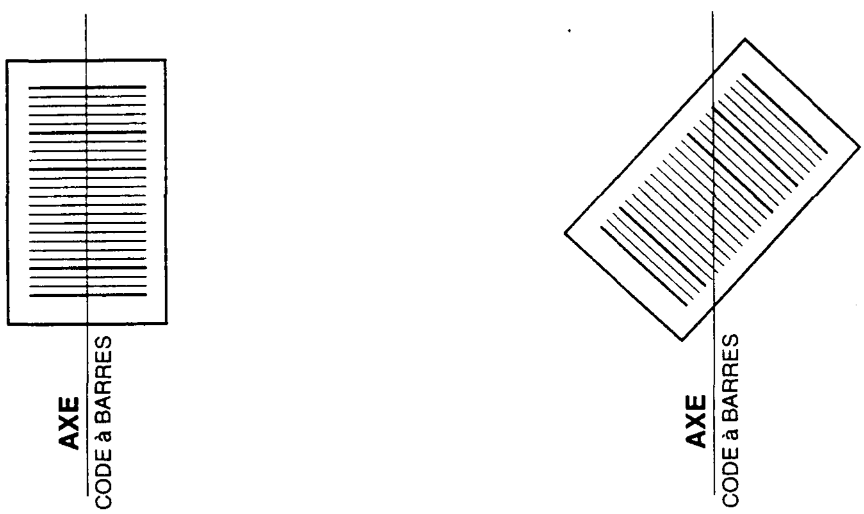
1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve obligatoire de MATHÉMATIQUES (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical, matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES

BON MAUVAIS



2) Pour remplir ce QCM vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée au début du texte du sujet.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille réponse une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne de 01 à 40 vous vous trouvez en face de quatre possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
  vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
  vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.
- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
  vous devez alors noircir la case E.

Attention toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

7) EXEMPLES de RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut

a) 3 b) 5 c) 4 d) -1

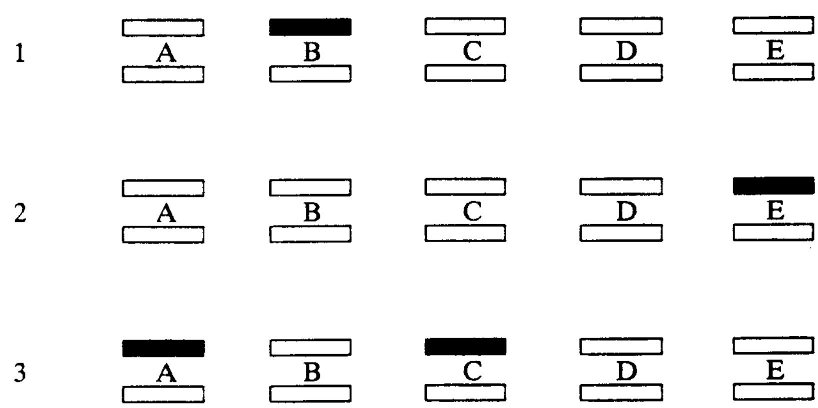
Question 2 : le produit $(-1)\ (-3)$ vaut

a) -3 b) -1 c) 4 d) 0

Question 3 : les racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$ sont

a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Liste des questions pouvant être liées :

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

(11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)

(21, 22, 23, 24, 25, 26, 27)

(28, 29, 30, 31, 32, 33)

(34. 35, 36, 37, 38, 39, 40)

Ce sujet comporte 40 questions toutes obligatoires.

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = (1+\sin x)^{\text{cotan } x}.$$

Question n° 01 :

Il est possible d'écrire $f(x)$ sous la forme :

a) $\ln[(1+\sin x)\ln(\text{cotan } x)]$.
b) $\exp[(\text{cotan } x)\ln(1+\sin x)]$.
c) $\ln[\exp[(1+\sin x)\ln(\text{cotan } x)]]$.
d) $\exp[\ln[(1+\sin x)\ln(\text{cotan } x)]]$.

Question n° 02 :

a) La fonction $x \to \text{cotan } x$ est $\pi-$périodique donc f est aussi $\pi-$ périodique.

b) $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\text{cotan}(\pi - x) = \text{cotan } x$ donc f est $\pi-$ périodique.

c) La fonction $x \to \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

d) f est définie en $x = 0^-$ car $\left(\lim\limits_{x\to 0^-} \text{cotan } x = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0\right)$.

Question n° 03 :

La fonction f est définie ou est prolongeable par continuité en

a) $x = 0$.
b) $x = \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction f n'est pas définie ou n'est pas prolongeable par continuité en

c) $x = \pi$.
d) $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Question n° 04 :

Si f est prolongeable par continuité en ces points alors il est possible de poser

a) $f(0) = -1$.
b) $f(\pi) = \dfrac{1}{e}$.
c) $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$.
d) $f(2\pi) = -e$.

Soit $u(x) = (\text{cotan } x)\ln(1+\sin x)$ définie sur $\mathcal{I} =]0,\ \pi[\cup \left]\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right[$.

Question n° 05 :

a) La fonction u est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,\ 2\pi]$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = -1$.
c) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} u(x) = -\infty$.
d) $\lim\limits_{x\to \pi} u(x) = +\infty$.

Question n° 06 :

Sur $\mathcal{I}$ nous avons

a) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\,\text{cotan}\,x = \dfrac{1-\sin x}{\sin x}$.

b) $[\text{cotan}\,x]' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

c) $[\ln(1+\sin x)]' = \dfrac{-\cos x}{1+\sin x}$.

d) $[\ln(\text{cotan}\,x)]' = -\dfrac{1}{\sin x\,\cos x}$.

Question n° 07 :

Sur $\mathcal{I}$ la fonction u est dérivable et

a) $u'(x) = \dfrac{\sin x\,\cos x}{1+\sin x}\,(1+2\sin x)$.

b) $x \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[\implies u'(x) > 0$.

c) u est monotone sur $\mathcal{I}$.

d) u n'est pas bornée sur $\mathcal{I}$.

Question n° 08 :

a) Au point $x = \dfrac{\pi}{2}$ la fonction $x \longrightarrow \text{cotan}\,x$ admet un développement limité au moins à l'ordre 2.

b) Au point $x = \dfrac{\pi}{2}$ la fonction $x \longrightarrow \ln(1+\sin x)$ n'admet pas de développement limité à l'ordre 2 car le nombre dérivé de cette fonction est indéterminé en ce point.

Si au point $x = \dfrac{\pi}{2}$ la fonction $u(x)$ admet un développement limité au moins à l'ordre 2 de la forme $u(x) = \alpha + \beta\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + o\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, alors

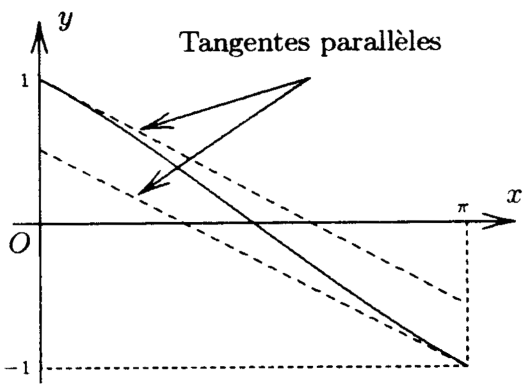
c) $\alpha = -1$.

d) $\beta = -\ln 2$.

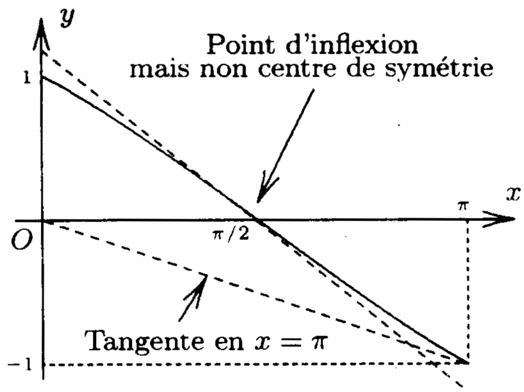
Question n° 09 :

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ la fonction u est représentée dans un repère Oxy par

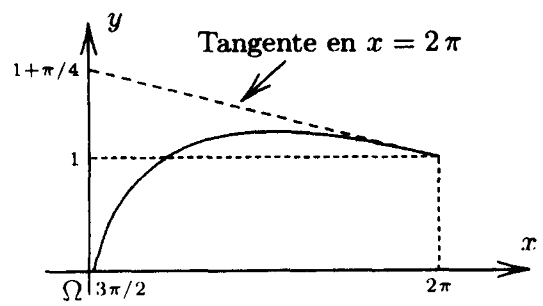
a)



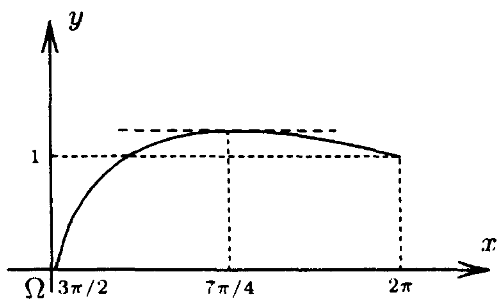
b)



Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ la fonction u est représentée dans un repère Ωxy par c)



d)



La fonction f est dérivable sur $\mathcal{I}$ et sa dérivée est de la forme $f'(x) = \dfrac{v(x)}{\sin^2 x}\, f(x)$.

Question n° 10 :

a) $u'(x) = v(x)$ sur au moins un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathcal{I} \quad u'(x) = -v(x)$.

c) Il existe un intervalle ouvert $\mathcal{K}$ tel $\forall x \in \mathcal{K} \quad u(x) > 0$.

d) La fonction f est strictement monotone car la fonction u est aussi strictement monotone.

L'application linéaire φ de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ de base $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}\right)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ de base $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ est définie analytiquement par

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcrcrcrcr} X & = & x & - & y & - & m\,z & + & t \\ Y & = & m\,x & - & y & - & z & + & t \\ Z & = & -x & + & m\,y & + & (m^2+m-1)\;z & - & m\,t \end{array} \right. .$$

m étant un paramètre réel. Soit M la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$.

Question n° 11 :

M admet deux colonnes opposées

a) est donc de rang au plus 3.

b) ne peut-être que de rang 4.

c) La loi du rang ne peut-être appliquée à φ car M est une matrice non carrée.

d) L'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de M est isomorphe à un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

Nous tranformons la matrice M à l'aide des deux opérations élémentaires sur les lignes

$$L_2 \longleftarrow L_2 - m\,L_1, \quad \text{puis} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$$

et nous notons M' la matrice obtenue.

Question n° 12 :

a) Le résultat est modifié si les deux opérations ci-dessus sont effectuées dans l'ordre inverse.

b) Toute opération élémentaire sur les lignes et/ou sur les colonnes de M ne modifie pas son rang.

c) M admet deux colonnes opposées donc M' aussi.

d) Toutes les lignes de M' sont proportionnelles.

Question n° 13 :

a) $\dim(\mathrm{Ker}\ \varphi) = 2$ pour $m^2 = 1$.

b) $\dim(\mathrm{Im}\ \varphi) = 1$ pour $m = -1$.

c) φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ pour $m^2 \neq 1$.

d) φ est injectif pour $m = 0$ et $m = 2$.

$m = 1$ dans les quatre questions suivantes.

Question n° 14 :

a) Ker φ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$ de dimension 3.

b) $x - y - z + t = 0$ est une équation de Ker φ.

c) Im φ est un espace vectoriel de dimension 1.

d) $X = Y = Z$ sont des équations de Im $= \varphi$.

${}^tM$ désigne la transposée de M. Soient les matrices $T = \dfrac{1}{4}\,{}^tM\,M$ et $U = \dfrac{1}{4}\,M\,{}^tM$.

Question n° 15 :

a) $T = U$ donc M et ${}^tM$ commutent.

b) T et U sont des matrices symétriques.

c) $\det U = \dfrac{1}{4} \det\left({}^tM\,M\right) = \dfrac{1}{4} \det^2 M$.

d) rang U = rang $({}^tM\,M) = 2$ rang M.

Question n° 16 :

a) U admet trois valeurs propres réelles distinctes, ce qui est attendu car Uest symétrique.

b) Les sous espaces propres de U sont au plus de dimension 2.

c) Il existe une et une seule matrice orthogonale P telle que ${}^tP\,U\,P$ soit diagonale.

d) Si Q est une matrice orthogonale telle que ${}^tQ\,U\,Q$ soit diagonale alors $Q =^t Q$.

Question n° 17 :

a) $U^2 = 2\,U$ car 2 est une valeur propre de U.

b) $U^n = 3^{n-1}U$ pour tout n supérieur ou égal à 0.

I est la matrice unité et O la matrice nulle.

c) Il existe α et β réels tels que $\alpha\,U^2 + \beta\,U = I$ donc U est inversible et $U^{-1} = \alpha\,U + \beta\,I$.

d) Il existe γ et δ réels tels que $U^2 - (\gamma + \delta)\,U + \gamma\delta\,I = O$.

Soit le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & m\,z & = & 1 \\ m\,x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & m\,y & + & (m^2 + m - 1)\,z & = & -m \end{array}\right. \qquad (S)$$

où m est un paramètre réel.

Question n° 18 :

a) (S) est impossible seulement si $m = -1$.

b) (S) n'est indéterminé que pour $m^2 = 1$.

c) Pour $m = 1$ il est possible d'exprimer x et y en fonction de z seul.

d) Le rang de (S) est au plus 2.

$\mathcal{E}$ est dans les deux questions suivantes euclidien et $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ est orthonormée. Soient les plans d'équations

$$\begin{array}{lccccccc} (A) & x & - & y & - & mz & = & 0 \\ (B) & mx & - & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Question n° 19 :

Pour tout réel m

a) (A) contient la droite définie par $\{x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$.

b) (B) contient le plan définie par $\{x = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.

Il existe au moins une valeur de m telle que les hyperplans (A) et (B) sont

c) confondus.

d) orthogonaux.

Question n° 20 :

a) dim $(A + B) = 4$ pour tout m.

b) dim $(A \cap B) = 2$ pour tout m.

Il existe une et une seule valeur de m telle que

c) dim $(A + B) = 4$.

d) dim $(A \cap B) = 2$.

On considère la fonction f, 2π périodique, de la variable réelle t, défini sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(t) = \cos pt,$$

où p est un paramètre réel strictement positif.

Question n°21 :

f est continue en $t = \pi$

a) uniquement pour $p = 1$.

b) pour au moins une valeur de p.

f est continue sur $\mathbb{R}$

c) pour tout p réel.

d) seulement pour p entier pair.

Question n°22 :

Dans le cas où f est continue en π alors pour tout p réel

a) f est dérivable en π mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en π.

b) f n'est jamais dérivable en π.

Pour p entier la fonction f

c) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) n'est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout p pair.

On considère le développement en série de Fourier à l'ordre $n \geq 1$ de f

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,.$$

Si la suite $S_n(f)(t)$ converge quand $n \to +\infty$, on note $S(f)(t)$ sa limite.

Question n°23 :

Si p est un entier alors pour tout t réel

a) $S(f)(t) = 0$.

b) $S(f)(t) = \cos pt$.

Si p est un réel non entier alors $\forall t$

c) $S(f)$ n'existe pas car f n'est pas continue.

d) $S(f)$ existe pour tout t réel car elle satisfait les conditions de Dirichlet.

Question n°24 :

De façon générale, si f est une fonction paire, 2π−périodique, de classe C^1 par morceaux et admettant un développement en série de Fourier à tout ordre de la forme

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t) \cos kt \, dt.$$

b) $\forall k \geq 2$, $b_k = 0$ car f est paire et admet donc un développement en série de Fourier impair.

c) $S_n(f)(t)$ converge ponctuellement vers $f(t)$ pour tout t réel.

d) $S_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Question n°25 :

Quelques formules de trigonométrie utilisées dans les séries de Fourier.

a) $2 \cos a \cos b = \cos(b-a) + \cos(a+b)$.

b) $2 \cos a \cos b = \cos(b-a) - \cos(a+b)$.

c) $2 \sin a \sin b = \cos(b-a) + \sin(a+b)$.

d) $2 \sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que $p = \frac{1}{4}$.

Question n°26 :

a) $a_k = 0$ pour $k \geq 1$.

b) $b_k = 0$ pour $k \geq 2$.

c) $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

d) $a_k = \frac{4\sqrt{2}(-1)^k}{1 + 16k^2}$ pour $k \geq 1$.

Question n°27 :

Pour tout t réel

a) $f(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1 - 16k^2})$.

b) $f(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Nous obtenons en particulier

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 16n^2} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 16n^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$.

Soit la famille C_λ de courbes définies par l'équation polaire dans le repère orthonormé Oxy

$$\rho = f(\theta) = 2\cos\theta + \lambda,$$

où λ est un paramètre réel.

Question n°28 :

a) C_0 est une droite.

b) C_0 est un cercle de centre O.

c) C_0 contient le point O.

d) C_0 contient une droite.

Question n°29 :

a) C_2 est l'image de C_0 par une translation.

b) Donc C_2 est un cercle car C_0 est un cercle.

c) C_2 est l'image de C_0 par une homothétie.

d) Donc C_2 est un ellipse car C_0 est un cercle

Question n°30 :

La courbe C_1 est

a) la réunion de deux cercles.

b) sans point doubles.

Nous avons

c) Les courbes C_{-1} et C_1 sont identiques.

d) Les courbes C_{-1} et C_1 ont un seul point commun.

Question n°31 :

Etude de la tangente (T) à la courbe C_2 au point M pour $\theta \in [0, \pi]$.

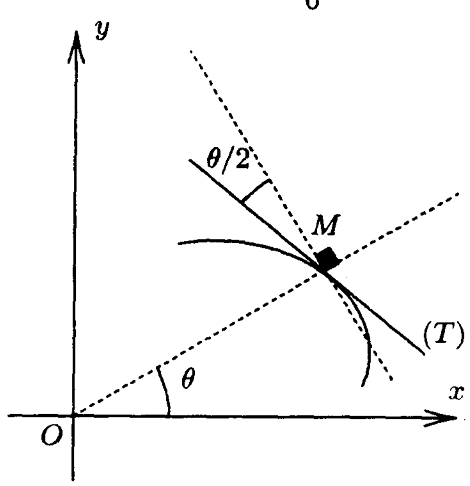
On note V l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right)$.

a) V est toujours aigu.

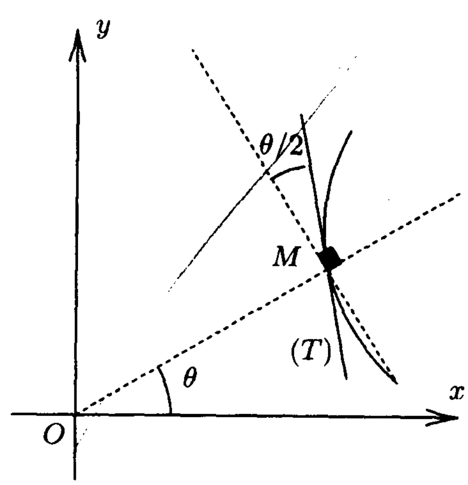
b) $V = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}$.

Graphiquement pour $\theta \simeq \dfrac{\pi}{6}$, la représentation dans un voisinage de M est

c)



d)



Question n°32 :

a) f est paire donc C_1 admet l'axe Ox pour axe de symétrie.

b) f est $2\pi-$ périodique donc l'étude complète de C_1 est obtenue en étudiant f sur l'intervalle $[0, +\pi]$, puis par une symétrie par rapport à l'axe Oy.

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour λ quelconque.

c) f est monotone.

d) f admet deux minimums.

Question n°33 :

C_2 coupe l'axe Oy en un point A d'ordonnée strictement positive et l'axe Ox en deux points B et C d'abscisses strictement positives. (On choisit B entre O et C.

a) Le triangle OAB est rectangle isocèle.

b) La droite AB est la médiane relative au point A du triangle OAC.

Soit D le symétrique de B par rapport à O.

c) Le triangle ABD est équilatéral.

d) La droite AB est la médiane relative au point A du triangle ACD.

On considère la suite de terme général

$$u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Question n° 34 :

La suite (u_n) est

a) négative.

b) croissante.

c) stationnaire

d) bornée.

Question n° 35 :

De manière générale, pour toute suite (u_n).

a) Toute suite positive décroissante est convergente.

b) Toute suite négative non majorée est divergente.

c) Toute suite monotone non bornée est convergente.

d) Toute suite négative majorée par une suite divergente est convergente.

On associe à la suite (u_n) la série de terme général $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n), \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Question n° 36 :

Le développement limité en $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2 de v_n est

a) $\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) $-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

c) $-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Question n° 37 :

De manière générale pour une série à termes réels quelconques,

a) Le développement limité en $\frac{1}{n}$ du terme général permet de déterminer sa nature.

b) Le a) n'est vrai que si, de plus, la série est à termes réels positifs.

c) Le critère des séries alternées permet d'affirmer que si le développement en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 1, est $\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, la série converge mais non absolument.

d) Le c) n'est vrai que si le terme général de la série décroît en valeur absolue à partir d'un certain rang.

Question n° 38 :

a) La série $\{v_n\}$ diverge.

b) La série $\{v_n\}$ converge car la suite (u_n) converge.

c) La suite (u_n) diverge donc la série u_n peut converger.

d) La suite (u_n) converge vers 0 donc la série $\{u_n\}$ converge vers 0.

Soit l'intégrale de Wallis $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$, définie pour $n \in \mathbb{N}$.

Question n° 39 :

a) (I_n) est croissante et majorée.

b) (I_n) est décroissante ou est minorée.

c) $I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) $I_{2n} < I_{2n+1} < I_{2n+2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Question n° 40 :

a) $1 < \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \dfrac{2n+1}{2n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) $1 < \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n}} < \dfrac{2n+1}{2n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) La suite (I_n) converge vers 1 car $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n x = 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) La suite (I_n) diverge car sa limite est nulle.