Questions liées : 1 à 16 et 17 à 40.
La calculatrice personnelle est interdite ; le concours fournit une calculatrice.

PARTIE I

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de E qui à tout vecteur de coordonnées (x, y, z, t) dans la base $\mathcal{B}$ associe le vecteur de coordonnées $(a^2x + aby + abz + b^2t, abx + a^2y + b^2z + abt, abx + b^2y + a^2z + abt, b^2x + aby + abz + a^2t)$ dans la base $\mathcal{B}$, où a, b sont des réels fixés.

Question 1. La matrice $M_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifie

a) $M_{a,b} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$

b) $M_{a,b}$ est symétrique et à coefficients complexes

c) $M_{a,b}$ est inversible car toute matrice symétrique réelle est inversible

d) $M_{a,b}$ est diagonalisable car toute matrice symétrique complexe est diagonalisable.

Question 2. Le polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \det(f_{a,b} - \lambda id)$ de l'endomorphisme $f_{a,b}$ peut s'écrire, id désignant l'endomorphisme identité

a) $\chi(\lambda) = \left((a+b)^2 - \lambda\right) \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 0 & b^2-a^2+\lambda & a^2-b^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix}$

b) $\chi(\lambda) = \left(\lambda - (a+b)^2\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ ab & a^2-\lambda & b^2-a^2+\lambda & 0 \\ ab & b^2 & a^2-b^2-\lambda & 0 \\ b^2 & ab & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix}$

c) $\chi(\lambda) = \left(\lambda - (a+b)^2\right)\left(\lambda - a^2 + b^2\right) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ ab & \lambda - a^2 & -1 \\ ab & -b^2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\chi(\lambda) = \left(\lambda - (a+b)^2\right)\left(\lambda - a^2 + b^2\right) \begin{vmatrix} 1 & ab & ab \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Question 3. Les valeurs propres de l'endomorphisme $f_{a,b}$ sont pour tout couple (a, b) de réels

a) 0, $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $\left(a^2 - b^2\right)$

b) $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $\left(b^2 - a^2\right)$

c) $i\,|a+b|$, $-i\,|a+b|$, $(a-b)^2$, $\left(a^2 - b^2\right)$

d) $(a+b)$, $(a-b)$, $(a+b)(a-b)$

Question 4. L'endomorphisme $f_{a,b}$

a) est diagonalisable car ses valeurs propres distinctes sont orthogonales

b) est diagonalisable dans une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de $f_{a,b}$

c) n'est pas diagonalisable car ses valeurs propres ne sont pas toutes de multiplicité 1

d) ne peut admettre 0 comme valeur propre car $f_{a,b}$ est diagonalisable.

Question 5. On supppose dans cette question a ou b nul ; l'endomorphisme $f_{a,b}$ admet alors

a) deux valeurs propres distinctes de multiplicité 2

b) une seule valeur propre de multiplicité 4

c) 0 pour valeur propre unique lorsque $a = b$

d) quatre valeurs propres distinctes.

Question 6. On suppose dans cette question les réels a et b non nuls, l'endomorphisme $f_{a,b}$ admet, lorsque $a^2 = b^2$

a) une seule valeur propre triple et une valeur propre simple

b) une valeur propre double et deux valeurs propres simples

et lorsque $a^2 \neq b^2$

c) quatre valeurs propres simples

d) deux valeurs propres simples et une valeur propre double $(b^2 - a^2)$.

Question 7. La base $\mathcal{B}$ est une base orthonormée formée de vecteurs propres de $f_{a,b}$ pour les couples (a, b) tels que

a) $a = 0$ et $b \neq 0$

b) $a = b = 0$ uniquement

c) $a \neq 0$ et $b \neq 0$

d) $b = 0$ et a quelconque

Question 8. Une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de $f_{a,b}$ est constituée de la famille de vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ définis par :

a) $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1)\,;\ \varepsilon_2 = (1, -1, -1, 1)\,;\ \varepsilon_3 = (0, 1, -1, 0)\,;\ \varepsilon_4 = (1, 0, 0, -1)$ pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab \neq 0$ et $a^2 \neq b^2$

b) $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, -1)\,;\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)\,;\ \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)\,;\ \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$ pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab \neq 0$ et $a^2 \neq b^2$

c) $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1),\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)\,;\ \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)\,;\ \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

d) $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)\,;\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)\,;\ \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)\,;\ \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$ uniquement pour les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ab \neq 0$ et $a^2 \neq b^2$

Question 9. La matrice P définie par : $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

a) est une matrice orthogonale

b) n'est pas une matrice orthogonale

c) est une matrice de passage telle que $P^{-1}M_{a,b}P = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$

d) est une matrice inversible et symétrique.

Question 10. Soit Q une matrice symétrique orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs de l'endomorphisme $f_{a,b}$ de la forme $Q = c\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha & \gamma \\ 1 & 1 & \gamma & \beta \end{pmatrix}$

on a alors

a) $\alpha = 1\,;\, \beta = \gamma = -1$ et c réel quelconque

b) $\alpha = \gamma = 1\,;\, \beta = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$

c) $\alpha = 1\,;\, \beta = \gamma = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$

d) $QM_{a,b}Q = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2-a^2 \end{pmatrix}$

Question 11. On suppose dans cette question $|a| \neq |b|$. Soit V un vecteur de E de composantes (v_1, v_2, v_3, v_4) dans la base $\mathcal{B}$; le vecteur X de E tel que $f_{a,b}(X) = V$ a pour composantes dans la base $\mathcal{B}$ le 4-uplet (x, y, z, t) défini par :

a) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}\left(a^2v_1 + abv_2 + abv_3 + b^2v_4\right) \\ y = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}\left(abv_1 + a^2v_2 + b^2v_3 + abv_4\right) \\ z = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}\left(abv_1 + b^2v_2 + a^2v_3 + abv_4\right) \\ t = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}\left(b^2v_1 + abv_2 + abv_3 + a^2v_4\right) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \dfrac{v_1}{(a+b)^2} \\ y = \dfrac{v_2}{(a-b)^2} \\ z = \dfrac{v_3}{a^2-b^2} \\ t = \dfrac{v_4}{a^2-b^2} \end{cases}$

et la matrice $\operatorname{Com}(M)$ ayant pour coefficients les cofacteurs des coefficients de M vérifie

c) $\operatorname{Com}(M) = (\det M).M^{-1}$

d) $\operatorname{Com}(M) = \left(a^2-b^2\right)^2 \begin{pmatrix} a^2 & -ab & -ab & b^2 \\ -ab & a^2 & b^2 & -ab \\ -ab & b^2 & a^2 & -ab \\ b^2 & -ab & -ab & a^2 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M_{a,b}$ des endomorphismes $f_{a,b}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ lorsque les couples (a,b) décrivent $\mathbb{R}^2$.

Question 12. Soient $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ 2 matrices de $\mathcal{M}$

a) $M_{a,b} + M_{a',b'} \in \mathcal{M}$ b) $M_{a,b}M_{a',b'} = M_{A,B} \in \mathcal{M}$ avec $A = ab' + ba'$ et $B = aa' + bb'$

c) $M_{a,b}M_{a',b'} = M_{A,B} \in \mathcal{M}$ avec $A = aa' + bb'$ et $B = ab' + ba'$

d) $M_{a,b}M_{a',b'} \notin \mathcal{M}$

Question 13. Soit $P_{a,b}$ la fonction polynôme définie, pour tout couple (a,b) de réels par $P_{a,b}(x) = a + bx$. Le reste $R_n(x)$ de la division euclidienne de $(P_{a,b}(x))^n$ par $\left(x^2-1\right)$ est pour tout entier $n \geqslant 2$ défini par :

a) $R_n(x) = (a-b)^n + (a+b)^n + [(a-b)^n - (a+b)^n]\,x$

b) $R_n(x) = \dfrac{1}{2}[(a-b)^n - (a+b)^n] + \dfrac{1}{2}[(a-b)^n + (a+b)^n]\,x$

et on a

c) $M_{a,b}^n = M_{\frac{1}{2}[(a-b)^n-(a+b)^n],\frac{1}{2}[(a-b)^n+(a+b)^n]}$

d) $M_{a,b}^n = M_{\frac{1}{2}[(a-b)^n+(a+b)^n],\frac{1}{2}[(a-b)^n-(a+b)^n]}$

On suppose dorénavant l'endomorphisme $f_{a,b}$ non bijectif et on désigne toujours par $M_{a,b}$ la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Question 14. Le rang de $f_{a,b}$ est :

a) 1 car les quatre colonnes de $M_{a,b}$ sont égales

b) supérieur ou égal à 2 car les quatre colonnes de $M_{a,b}$ ne sont pas égales

c) 2 car deux des colonnes de $M_{a,b}$ sont linéairement indépendantes

d) 1 car les quatre colonnes de $M_{a,b}$ sont soit égales, soit opposées.

Question 15. (a,b) et (a',b') étant des couples de réels, on a l'égalité $M_{a,b}M_{a',b'} = 0$ pour

a) a' et b' quelconques $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

b) $b' = -a'$ avec a' réel quelconque pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}$ est distinct de l'endomorphisme nul

c) $b' = a'$ avec a' réel quelconque pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}$ n'est pas l'endomorphisme nul

d) $b' = a'$ avec a' réel quelconque pour $b = -a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ tel que $f_{a,b} \neq 0$ et
$b' = -a'$ avec a' réel quelconque pour $b = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ tel que $f_{a,b} \neq 0$.

Question 16. La forme quadratique Φ associée, dans la base $\mathcal{B}$, à la matrice $M_{a,b}$, est définie, pour tout vecteur X de E de composantes (x,y,z,t) dans $\mathcal{B}$, par :

a) $\Phi(X) = a^2\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right) + abxy + abxz + b^2xt + abyz + abzt$

b) $\Phi(X) = a^2\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right) + 2abxy + 2abxz + 2b^2xt + 2b^2yz + 2abyt + 2abzt$

c) $\Phi(X) = (a+b)^2x^2 + (a-b)^2y^2 + \left(a^2-b^2\right)z^2 + \left(a^2-b^2\right)t^2$

d) $\Phi(X) = 2a^2\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right) + 2abxy + 2abxz + 2b^2xt + 2b^2yz + 2abyt + 2abzt$

PARTIE II

On considère la fonction réelle g définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$g(t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ \ell \text{ si } t = 0 \text{ où } \ell \text{ est un réel fixé.} \end{array} \right.$$

Question 17. La fonction g est

a) dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout ℓ réel

b) continue mais non dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans le cas où $\ell = 1$

c) pour $\ell = 1$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et a pour dérivée $g'(t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\cos t}{t^2}(t - \tan t) \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{array} \right.$

d) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ uniquement, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$.

Question 18. La fonction g est, pour tout ℓ réel

a) croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $g'(t) \leqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ mais n'est pas décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car g' n'est pas définie en 0

d) décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ uniquement pour $\ell \geqslant 1$.

Question 19. On a alors, pour tout ℓ réel

a) $1 \leqslant g(t) \leqslant g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\frac{2}{\pi} \leqslant g(t) \leqslant \ell$ $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $\frac{2}{\pi} \leqslant g(t) \leqslant 1$ $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

d) $\frac{2}{\pi} \leqslant g(t) \leqslant 1$ $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On note I l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{2}{t^2} \sin^2 \frac{t}{2}\, dt$.

Question 20. L'intégrale I est

a) divergente car la fonction $\dfrac{2}{t^2}\sin^2\dfrac{t}{2}$ n'est pas définie en 0

b) absolument convergente car la fonction $\dfrac{2}{t^2}\sin^2\dfrac{t}{2}$ est continue sur $]0,\pi]$ et admet une limite finie $\dfrac{1}{2}$ en 0

c) absolument convergente mais est différente, lorsque $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, de l'intégrale généralisée $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(g\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2\,dt$

d) pour tout ℓ réel, égale à l'intégrale généralisée absolument convergente $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(u)\,du.$

Question 21. On a pour tout ℓ réel, les inégalités :

a) $\dfrac{2}{\pi} \leqslant I \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

b) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant I \leqslant \dfrac{\pi}{2}g^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $\dfrac{4}{\pi^2} \leqslant I \leqslant 1$

d) $\dfrac{2}{\pi} \leqslant I \leqslant \ell^2\dfrac{\pi}{2}$

Question 22. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}\,dt$

a) n'est pas absolument convergente

b) est absolument convergente car $\left|\dfrac{2}{t^2}\sin^2\dfrac{t}{2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ dont l'intégrale généralisée sur $[1,+\infty[$ est convergente

c) est absolument convergente et majorée par l'intégrale généralisée convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2}\,dt$

d) est convergente car une condition suffisante de convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

Question 23. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est

a) convergente car absolument convergente et est majorée par $\dfrac{\pi}{2}$

b) divergente car l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt$ ne converge pas

c) convergente car égale à l'intégrale généralisée convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$

d) absolument convergente car égale à l'intégrale généralisée absolument convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$

On considère la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(t) = \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{2}{t} \text{ pour } t \in\,]0,\pi] \\ 0 \text{ pour } t = 0 \end{array}\right.$

Question 24. La fonction f est

a) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ car f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$, continue sur $[0,\pi]$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \frac{1}{24}$

b) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ mais f' n'est pas définie en 0
et f a pour dérivée

c) $f'(t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{2\,(1-\cos t) - t^2 \cos \dfrac{t}{2}}{4t^2 \sin^2 \dfrac{t}{2}} \forall t \in \left]0, \pi\right] \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} \text{ pour } t = 0 \end{array} \right.$

d) $f'(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{\cos \dfrac{t}{2}}{4\sin^2 \dfrac{t}{2}} \forall t \in \left]0, \pi\right]$; f n'étant pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t} = +\infty$.

Question 25. Soient φ_1 et φ_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_1(x) = \dfrac{2-\sin^2 x}{2}$ et $\varphi_2(x) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\sin^3 x}{x^3} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$

Le développement en série entière de φ_1 s'écrit :

a) $\varphi_1(x) = 1 - \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4p+2}}{((2p+1)!)^2}$ de rayon de convergence $R_1 = +\infty$

b) $\varphi_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^6}{25} + \dfrac{1}{4}\sum\limits_{p=4}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{(2x)^{2p}}{(2p)!}$ de rayon de convergence $R_1 = +\infty$

et celui de la fonction φ_2 est de la forme :

c) $\varphi_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{13}{120}x^4 - \dfrac{4!}{3024}x^6 + \dfrac{3}{4}\sum\limits_{p=5}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{1-3^{2p}}{(2p+1)!} x^{2p-2}$ de rayon de convergence $R_2 = 1$

d) $\varphi_2(x) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-1)^p 3 \dfrac{(1-9^p)}{(2p+1)!} x^{2p}$ de rayon de convergence $R_2 = +\infty$.

Question 26. La fonction $\psi = 4\,(\varphi_1 - \varphi_2)$ admet un développement en série entière de la forme

a) $\psi(x) = \dfrac{7}{30}x^4 - \dfrac{4}{45}x^6 + \sum\limits_{p=4}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{(2x)^{2p}}{(2p)!} + 3\sum\limits_{p=4}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{(9^p-1)}{(2p+1)!} x^{2p-2}$

b) $\psi(x) = \dfrac{7}{30}x^4 - \dfrac{4}{45}x^6 + \sum\limits_{p=4}^{+\infty} (-1)^p \left(\dfrac{4^p}{(2p)!} + 3\dfrac{(9^p-1)}{(2p+1)!} \right) x^{2p}$

c) $\psi(x) = \dfrac{7}{30}x^4 - \dfrac{131}{3780}x^6 + \sum\limits_{p=4}^{+\infty} (-1)^p \left(\dfrac{4}{(2p)!} - 3\dfrac{9^{p+1}-1}{(2p+3)!} \right) x^{2p}$

d) $\psi(x) = 4 + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\dfrac{4^p}{(2p)!} + 12\dfrac{9^p-1}{(2p+1)!} \right) x^{2p}$

Question 27. Pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction ψ vérifie l'inégalité

a) $\psi(x) \geqslant (21 - 8x^2)\dfrac{x^4}{90}$ car une série alternée convergente est du signe opposé à celui de son premier terme

b) $\psi(x) \leqslant (21 - 8x^2)\dfrac{x^4}{90}$ car une série alternée convergente est du signe de son premier terme

c) $\psi(x) \leqslant 0$

d) $\psi(x) \geqslant \dfrac{x^4}{90}$

Question 28. La fonction f'' dérivée seconde de f, si elle existe, vérifie :

a) $f''(t) = \dfrac{1}{8\sin^3 \dfrac{t}{2}} \left[\left(2 - \sin^2 \dfrac{t}{2} \right) - \dfrac{16}{t^3} \sin^3 \dfrac{t}{2} \right] \forall t \in \left]0, \pi\right]$

b) $f''(t) = \dfrac{1}{8\sin^2\dfrac{t}{2}} + \dfrac{\cos^2\dfrac{t}{2}}{4\sin^3\dfrac{t}{2}} - \dfrac{2}{t^3}$ $\forall t \in [0,\pi]$

c) $f''(t)$ est équivalente à $\dfrac{t}{96}$ au voisinage de 0

d) $\lim\limits_{t\to 0^+} f''(t) = -\infty$.

Question 29. On a alors pour tout $t \in]0,\pi]$

a) $f''(t) \leqslant 0$ car $\psi\left(\dfrac{t}{2}\right) \leqslant 0$

b) $f''(t) > 0$ car $\psi\left(\dfrac{t}{2}\right) > (21-2\pi^2)\dfrac{t^4}{1440} > 0$

et la fonction f' est

c) croissante mais non strictement croissante sur $[0,\pi]$

d) décroissante sur $[0,\pi]$.

On considère, si elle existe, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\ dt$.

Question 30. On a :

a) $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^\pi f'(t)\ dt$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $|I_n| \leqslant \dfrac{\pi}{12(2n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car cette suite est croissante et majorée

c) $(I_n)_{\in\mathbb{N}}$ diverge car $\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t$, t étant fixé dans $[0,\pi]$, n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Question 31. On obtient

a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\ dt = \frac{\pi}{2} - I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\ dt$ n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$

c) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}$

d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}$

On note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du nombre réel $\dfrac{2x}{\pi}$ pour x réel fixé.

Question 32. Pour x réel strictement positif fixé, la série de terme général $\sin^2\dfrac{x}{n}$, $n \geqslant 1$ est :

a) convergente car toute série dont le terme général tend vers 0 converge

b) divergente car la série de terme général $\dfrac{x}{n}$ diverge

c) absolument convergente car $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant \sin^2\dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{x^2}{n^2}$ terme général d'une série convergente

d) de même nature que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty}\sin^2\frac{x}{t}\ dt$ car la fonction $t \mapsto \sin^2\dfrac{x}{t}$ est positive, décroissante pour $t \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$.

Question 33. On a pour $x > 0$

a) $\displaystyle\int_n^{n+1} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt \geqslant \sin^2 \frac{x}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\displaystyle\int_n^{n+1} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt \geqslant \sin^2 \frac{x}{n+1} \ \forall n \geqslant \mathrm{E}(x)+1$

c) $\displaystyle\int_n^{n+1} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt \geqslant \sin^2 \frac{x}{n+1} \ \forall n \leqslant \mathrm{E}(x)$

d) $\displaystyle\int_n^{n+1} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt \leqslant \sin^2 \frac{x}{n+1} \ \forall n \geqslant \mathrm{E}(x)+1$

Question 34. Pour tout $x > 0$, on obtient les inégalités :

a) $\displaystyle -1 \leqslant -\int_{\frac{2x}{\pi}}^{\mathrm{E}(x)+1} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt \leqslant \sum_{n=\mathrm{E}(x)+1}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{n} - \int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt$

b) $\displaystyle \sum_{n=\mathrm{E}(x)+1}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{n} - \int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt \leqslant -\int_{\frac{2x}{\pi}}^{\mathrm{E}(x)+1} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt$

c) $\displaystyle \sum_{n=\mathrm{E}(x)+1}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{n} \leqslant \int_{\mathrm{E}(x)+1}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt + \sin^2 \frac{x}{\mathrm{E}(x)+1}$

d) $\displaystyle \left| \sum_{n=\mathrm{E}(x)+1}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{n} - \int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2 \frac{x}{t}\, dt \right| > 1.$

Question 35. Pour x réel fixé, on considère la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$; $n \geqslant 1$. Cette série est

a) convergente mais non absolument convergente car elle n'est pas à termes de signe constant

b) absolument convergente donc convergente

et son reste $\displaystyle R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ vérifie pour tout $N \geqslant 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle |R_N| \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

d) $\displaystyle |R_N| \leqslant \frac{|x|}{N}$

Question 36. On pose $\displaystyle\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sin \frac{x}{n}}$, pour les réels x tels que la série converge. On a

a) φ n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$ car la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ ne converge pas pour $x = 0$

b) φ n'est définie qu'en 0 car la série de terme général $\displaystyle\frac{A}{n}$, $A \neq 0$, est divergente

c) $\displaystyle \forall x, x_0 \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}^*\ |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \left(\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{x_0}{n} \right) \right| + \frac{|x| + |x_0|}{N}$

d) $\displaystyle \forall x, x_0 \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}^*\ |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \left(\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{x_0}{n} \right) \right| + 2\int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

Question 37. Pour u réel fixé, la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{n^2}\cos\frac{u}{n}$, pour $n \geqslant 1$, est

a) convergente car absolument convergente puisque $\displaystyle\left|\frac{1}{n^2}\cos\frac{u}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \forall n \geqslant 1$

b) divergente car la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n^2}\cos\frac{u}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 puisque la fonction $\cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$

c) convergente mais non absolument convergente car $\cos\dfrac{u}{n}$ n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang

d) convergente car c'est une série alternée

Question 38. Le reste $R'_N(u) = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{u}{n}$ vérifie pour tout $N \geqslant 1$ et pour tout u réel

a) $R'_N(u) \leqslant \dfrac{1}{(N+1)^2}\cos\dfrac{u}{N+1}$ car le reste d'une série convergente est majoré par son premier terme

b) $|R'_N(u)| \leqslant \displaystyle\int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

c) $\lim\limits_{N\to+\infty} R'_N(u) = 0$

d) $\lim\limits_{N\to+\infty} R'_N(u) = +\infty$

Question 39. Pour tout x réel strictement positif on a :

a) $\displaystyle\int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{x}{t}\right) dt = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$

b) $\displaystyle\int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{x}{t}\right) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=\mathrm{E}(x)+1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = 0$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=\mathrm{E}(x)+1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$

Question 40. Si l'on admet que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\mathrm{E}(x)} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$, on obtient alors $I = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)$

a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$

b) $I = \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \frac{\pi}{2}$

c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\, du$

d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$