La calculatrice est autorisée.

Questions liées : 1 à 7 ; 8 à 27 ; 28 à 32 ; 33 à 40

PARTIE I

n étant un entier naturel et a un nombre réel non nul on pose :

$$u_n = \int_0^\pi e^{ax} \cos nx \; \mathrm{d}\,x \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^\pi e^{ax} \sin nx \; \mathrm{d}\,x$$

1 - u_n vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $\left| \begin{array}{l} u_n = \dfrac{1}{an} \left[e^{ax} \sin nx\right]_0^\pi \text{ pour } n > 0 \\ \text{et} \\ u_0 = \dfrac{1}{a}\left(e^{a\pi} - 1\right) \end{array} \right.$

b) $u_n = \dfrac{1}{a}\left[e^{ax}\left(\cos nx - \dfrac{n}{a} \sin ax\right)\right]_0^\pi + \dfrac{n^2}{a^2} u_n$

c) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + a^2}\left[e^{ax}\left(a \cos nx + n \sin nx\right)\right]_0^\pi$

d) $u_n = \dfrac{1}{n^2 - a^2}\left((-1)^n e^{a\pi} a - a\right)$

2 - v_n satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $v_n = \dfrac{1}{an}\left[-e^{ax} \cos nx\right]_0^\pi$

b) $v_n = \dfrac{1}{a}\left[e^{ax}\left(-\dfrac{n}{a} \cos nx + \sin nx\right)\right]_0^\pi - \dfrac{n^2}{a^2} v_n$

c) $v_n = \dfrac{1}{n^2 - a^2}\left[e^{ax}\left(n \cos nx - a \sin nx\right)\right]_0^\pi$

d) $v_n = \dfrac{1}{n^2 + a^2}\left((-1)^{n+1} n e^{a\pi} + n\right)$

3 - La valeur absolue de u_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ majorée par :

a) $\dfrac{|a|}{n^2 + a^2}$ b) $\dfrac{|a|\left(1 + e^{a\pi}\right)}{|n^2 - a^2|}$

et celle de v_n est majorée par :

c) $\dfrac{n\left(1 - e^{a\pi}\right)}{a^2 + n^2}$ d) $\dfrac{1 + e^{a\pi}}{an}$

4 - La suite (v_{2k}), $k \in \mathbb{N}^*$, est équivalente à la suite de terme général :

a) $\dfrac{1}{2k}\left(1 - e^{a\pi}\right)$ b) $\dfrac{1 + e^{a\pi}}{k}$ c) $\dfrac{1}{2k}$ d) $\dfrac{1}{k}$

5 - a) Les suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être convergentes car elles ne sont pas de signe constant.

b) Les suites (u_n) et (v_n) convergent car toute suite majorée est convergente.

c) La suite (u_n) converge vers 0

d) La suite (u_n) diverge car la suite $(\cos nx)$ n'a pas de limite

On note $\sum u_n$ (respectivement $\sum v_n$) la série numérique de terme général u_n (respectivement v_n)

6 - a) La série $\sum v_{2k}$ converge car $\lim\limits_{k \to +\infty} v_{2k} = 0$

b) La série $\sum v_{2k}$ est de même nature que la série convergente $\sum \dfrac{\left(1 - e^{a\pi}\right)}{2k}$

c) La série $\sum v_n$ diverge, comme somme d'une série divergente et d'une série convergente.

d) La série $\sum v_n$ converge car v_n est équivalent à $\dfrac{(-1)^{n+1}e^{a\pi}}{n}$, terme général d'une série convergente.

7 - a) La série $\sum u_n$ est convergente car u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$

b) La série $\sum v_n$ est alternée donc ne peut être absolument convergente

c) La série $\sum u_n$ est absolument convergente car $|u_n|$ est majoré par le terme général d'une série convergente de la forme $\dfrac{A}{n^2}$

d) La série $\sum u_n$ est divergente.

PARTIE II

Soit f la fonction qui à x associe $\dfrac{1}{1+u\cos x}$, où u est un nombre réel fixé.

8 - La fonction f est continue

a) sur $\mathbb{R}$ pour tout $u \in]-1,1[$

b) sur $[0,\pi]$ pour tout $u \in [-1,1]$

c) sur $[0,\pi]$ pour tout $u \in \mathbb{R}$

d) seulement sur $]0,\pi[$, pour tout $u \in]-1,1[$

9 - Pour $u=-1$, la fonction f est équivalente au voisinage de 0 à la fonction f_1

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $f_1(x) = \dfrac{2}{x}$

et pour $u=1$, la fonction f est équivalente au voisinage de π à la fonction f_2

c) $f_2(x) = \dfrac{2}{(x-\pi)^2}$ d) $f_2(x) = \dfrac{2}{\pi - x}$

10 - L'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\ \mathrm{d}x$ est :

a) impropre pour tout $u \in [-1,1]$

b) non impropre, $\forall u \in [-1,1]$

c) impropre, uniquement pour $u=-1$

d) impropre pour $u \in [-1,1]$ tel que $|u|=1$

11 - La fonction $(x-\pi)^\alpha$, avec α réel,

a) est intégrable sur $]0,\pi[$ pour $\alpha > 1$

b) n'est pas intégrable sur $]0,\pi[$ pour $\alpha > 1$

et l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\ \mathrm{d}x$, lorsqu'elle est impropre est

c) convergente car les deux intégrales $\displaystyle\int_0^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_b^\pi f(x)\ \mathrm{d}x$ sont divergentes, $\forall b \in]0,\pi[$

d) divergente

On considère la fonction g qui à u réel associe $g(u) = \displaystyle\int_0^\pi f(x)\ \mathrm{d}x$, lorsque cette intégrale est convergente.

12 - La fonction g est définie sur :

a) $]-1,1[$ b) $[-1,1]$ c) $[-1,1] \setminus \{0\}$ d) $]-1,1]$

13 - Le changement de variable défini par $t = \tan(x/2)$ donne

a) $g(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}\,t}{t^2 + 2tu + 1}$

b) $g(u) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\,t}{(1-u) + (1+u)t^2}$

et la fonction g s'écrit

c) $g(u) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-u^2}}$ pour tout $u \in \,]-1, 1[$

d) $g(u) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\pi\,|u|}{u\sqrt{1-u^2}} & \text{si} \quad 0 < |u| < 1 \\ \text{et} & \\ \pi & \text{si} \quad u = 0 \end{array} \right.$

Soit h la fonction telle que $h(x) = \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$ où λ est un nombre réel

14 - Le trinôme du second degré $X^2 - 2X\cos x + 1$

a) est strictement positif pour $x \in [0, \pi]$, $\forall X \in \mathbb{R}$

b) est strictement positif sur $\mathbb{R}$, pour $x \in \,]0, \pi[$ uniquement

c) admet une racine double 1 pour $x = 0$

d) est strictement négatif sur $\mathbb{R}$ pour $x \in [0, \pi]$

15 - La fonction h est

a) continue sur $[0, \pi]$ pour tout λ réel

b) indéfiniment dérivable sur $[0, \pi]$ pour tout λ réel tel que $|\lambda| < 1$

et la fonction $x \mapsto h(x)\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, est intégrable

c) sur $[0, \pi]$ pour tout λ réel

d) sur $[0, \pi]$ pour tout λ réel tel que $|\lambda| < 1$.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\cos nx \;\mathrm{d}\,x$, lorsque cette intégrale existe.

16 - I_0 est :

a) strictement positif

b) strictement négatif

et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) $I_0 \leqslant I_n \leqslant -I_0$

d) $-I_0 < I_n < I_0$

17 - I_0 peut s'exprimer sous la forme :

a) $I_0 = g\left(-\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)\dfrac{1}{1+\lambda^2}$

b) $I_0 = g\left(\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)\dfrac{1}{1+\lambda^2}$

c) $I_0 = \dfrac{\pi}{1-\lambda^2}$

d) $I_0 = \dfrac{\pi}{\lambda^2 - 1}$

18 - Les racines du polynômes $X^2 - 2X\cos x + 1$ sont, pour tout x réel :

a) e^{ix} et e^{-ix}

b) réelles car le polynôme est à coefficients réels

et la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1 - X^2}{X^2 - 2X\cos x + 1}$ s'écrit :

c) $\dfrac{1}{1 - Xe^{ix}} + \dfrac{1}{1 - Xe^{-ix}}$

d) $-1 + \dfrac{1}{1 - Xe^{ix}} + \dfrac{1}{1 + Xe^{ix}}$

19 - La fraction rationnelle $\dfrac{1}{1 - Xe^{ix}}$ peut se mettre sous la forme :

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} X^p e^{ipx} + \frac{X^n e^{inx}}{1 + Xe^{ix}}$

b) $\sum_{p=0}^{n} X^p e^{ipx}$

et la fraction rationnelle $\dfrac{1-X^2}{X^2-2X\cos x+1}$ sous la forme :

c) $\sum_{p=0}^{n} 2X^p \cos px$

d) $2\sum_{p=1}^{n-1} X^p \cos px + X^n \dfrac{2\cos nx - 2X\cos(n-1)x}{X^2-2X\cos x+1}$

20 - La fonction k de la variable réelle λ, définie par $k(\lambda) = \dfrac{1-\lambda^2}{\lambda^2-2\lambda\cos x+1}$ peut s'écrire sous la forme :

a) $k(\lambda) = 2\sum_{p=0}^{n} \lambda^p \int_0^\pi \cos px \, \mathrm{d}\, x$

b) $k(\lambda) = 2\sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \int_0^\pi \cos px \, \mathrm{d}\, x + 2\lambda^n (I_n - \lambda I_{n-1})$

et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence, valable $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

c) $\lambda^n (I_n - \lambda I_{n-1}) = \dfrac{\pi}{2}$

d) $I_n = \lambda I_{n-1}$

21 - Le terme général I_n de cette suite s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $I_n = \dfrac{\lambda^n \pi}{\lambda^2 - 1}$

b) $\left| \begin{array}{l} I_{2q} = \dfrac{\lambda^{2q}\pi}{1-\lambda^2} + \dfrac{\pi}{2}\left\{ \sum_{p=1}^{q-1} \left(\lambda^{2p} + \dfrac{1}{\lambda^{2p}} \right) + 1 + \dfrac{1}{\lambda^{2q}} \right\} \\ I_{2q+1} = \dfrac{\lambda^{2q+1}\pi}{1-\lambda^2} + \dfrac{\pi}{2}\left\{ \sum_{p=1}^{q-1} \left(\lambda^{2p+1} + \dfrac{1}{\lambda^{2p+1}} \right) + 1 + \dfrac{1}{\lambda^{2q+1}} \right\} \end{array} \right.$

et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ

c) $\ell = 0$

d) $\ell = \dfrac{\pi}{2}$

22 - La fonction h, définie par $h(x) = \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$

a) est paire et π-périodique pour tout réel λ tel que $|\lambda| < 1$

b) est 2π-périodique et impaire pour tout réel λ

c) est, pour tout λ réel 2π-périodique mais n'est ni paire ni impaire

d) n'est périodique pour aucune valeur du réel λ

23 - La fonction h

a) n'est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour aucune valeur du réel λ

b) est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout réel λ

et sa dérivée h', si elle existe, s'écrit :

c) $h'(x) = -\dfrac{2\lambda\sin x}{(1-2\lambda\cos x+\lambda^2)^2}$

d) $h'(x) = \dfrac{2(\cos x - \lambda)}{(\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1)^2}$

24 - Pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier

a) il suffit qu'elle soit continue

b) il suffit qu'elle soit périodique

c) il est nécessaire qu'elle soit continue

d) il est nécessaire qu'elle soit dérivable

25 - La fonction h, pour λ réel tel que $|\lambda| < 1$

a) est développable en série de Fourier car elle est π-périodique et indéfiniment dérivable

b) n'est pas développable en série de Fourier

et son développement en série de Fourier, s'il existe, converge vers

c) $\left| \begin{array}{lll} h(x) & \text{en tout point} & x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{pour} & x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

d) la demi-somme des limites à droite et à gauche de h en tout point x de $\mathbb{R}$

26 - Les coefficients de Fourier trigonométriques a_n et b_n de h sont donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout λ réel tel que $|\lambda| < 1$, par :

a) $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\cos nx \,\mathrm{d}\,x$ et $b_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\sin nx \,\mathrm{d}\,x$

b) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\cos 2nx \,\mathrm{d}\,x$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\sin 2nx \,\mathrm{d}\,x$

c) $b_n = 0$ et $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\cos 2nx \,\mathrm{d}\,x$ car h est paire

d) $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\sin nx \,\mathrm{d}\,x$ car h est impaire

27 - On a pour tout réel λ tel que $|\lambda| < 1$

a) $h(x) = \dfrac{1}{1-\lambda^2}\left\{1 + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos nx\right\},\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $h(x) = \dfrac{\pi}{1-\lambda^2}\left\{\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos nx\right\},\ \forall x \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = \dfrac{2}{1-\lambda^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \sin nx,\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{1}{1-\lambda^2}\left\{1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2\lambda^n \cos nx\right\} = \left| \begin{array}{lll} h(x) & \text{pour} & x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{pour} & x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

PARTIE III

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ($e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)$), espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

28 - La famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante forme une base B_1 de $\mathbb{R}^3$

a) $V_1 = e_1\,;\ V_2 = e_2\,;\ V_3 = 3e_1\,;$

b) $V_1 = e_1\,;\ V_2 = e_2 - e_3$ car les vecteurs sont linéairement indépendants

c) $V_1 = e_1 + e_2\,;\ V_2 = e_2 - e_3\,;\ V_3 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$

d) $V_1 = e_1 + e_2\,;\ V_2 = e_2 - e_3\,;\ V_3 = e_1$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui, au triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, associe le triplet $(4x - 5y - 5z, 5x - 6y - 7z, -2x + 2y + 3z)$

29 - La matrice A de f dans la base B s'écrit :

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -5 & -6 & 2 \\ -5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

et la matrice A' de f dans la base B_1 définie à la question 28 est de la forme :

c) $A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels

d) A' est diagonale

30 - Les valeurs propres de A sont :

a) -1 et 1 simples

b) 2, 0, 1 simples

c) -1 simple et 1 double

d) -1 et 1 doubles

31 - L'endomorphisme f est :

a) inversible car 0 n'est pas valeur propre

b) non inversible car les valeurs propres ne sont pas toutes distinctes

c) non diagonalisable car une condition nécessaire de diagonalisation est que toutes les valeurs propres soient simples

d) diagonalisable

32 - P étant la matrice de passage de la base B à la base B_1 définie à la question 28, la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s'écrit :

a) $A^n = P^{-1} A'^n P$

b) $A^n = P^{-1} A'^n$

c) $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n + 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ (-1)^n & -1 & 3^n - 2^n - 1 \end{pmatrix}$

d) $A^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4k & 1-4k & -4k \\ -4k & 4k & 1+4k \end{pmatrix}$ si $n = 2k$

et $A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4k+5 & -4k-4 & 4k-5 \\ -4k-2 & 4k+2 & 4k+3 \end{pmatrix}$ si $n = 2k+1$

PARTIE IV

Soit n un entier positif ou nul, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels de degré au plus égal à n.
Il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un et un seul polynôme $P_n \in E_n$ qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = P_n(\cos x)$$

33 - On a pour tout $n > 0$

a) $P_{n+1} + P_{n-1} = X P_n$

b) $P_{n+1} - P_{n-1} = 2X P_n$

c) $P_n = \sum\limits_{0 \leqslant 2p \leqslant n} (-1)^p C_n^p X^{n-2p} \left(1 - X^2\right)^p$

d) $P_n = \sum\limits_{0 \leqslant 2p \leqslant n} C_n^{2p} X^{n-2p} \left(X^2 - 1\right)^p$

34 - Ces polynômes vérifient pour tout n, P_n' désignant le polynôme dérivé de P_n

a) $P_n(0) = 1$ et P_n est pair si n est pair

b) $P_n(-1) = 0$ et P_n est impair si n est impair

c) $P_{2n}(0) = (-1)^n$ et $P'_{2n+1}(0) = (-1)^n(2n+1)$

d) $P_n(-1) = (-1)^n$ et $P'_n(-1) = 0$

35 - Pour $n > 0$, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction polynôme $P_n(x)$ est équivalente à

a) $2^n x^n$

b) $2^{n-1} x^n$

c) $(n-1)! x^n$

d) $n! x^n$

36 - Les polynômes P_3 et P_4 sont

a) $P_3 = 4X^3 - 3X$ et $P_4 = 8X^4 + 8X^2 + 1$

b) $P_3 = 4X^3 + 3X$ et $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

c) $P_3 = 3X^3 - 4X$ et $P_4 = 12X^4 + 8X^2 + 1$

d) $P_3 = 6X^3 - 4X$ et $P_4 = 12X^4 - 8X^2 + 1$

On note M_n la matrice carrée, à $n+1$ colonnes, dont la colonne numéro $j+1$, pour tout j entier compris entre 0 et n, a pour coefficients les composantes du polynôme P_j dans la base canonique de l'espace E_n des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

37 - Le déterminant de la matrice M_n vaut

a) $n!$

b) 2^{n-1}

c) $2^{n(n+1)/2}$

d) $2^{n(n-1)/2}$

On considère Φ_n, l'endomorphisme de E_n qui à tout polynôme P de E_n associe le polynôme $\Phi_n(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + XP' + P(0)$ où P' et P'' désignent les polynômes dérivés de P.
On désigne par B_n sa matrice dans la base canonique de E_n.

38 - La matrice B_n est

a) triangulaire inférieure et $\det(B_n) = n!(n-1)!$

b) triangulaire supérieure et $\det(B_n) = n!$

c) diagonalisable et $\det(B_n) = (n!)^2$

d) inversible et la matrice inverse est triangulaire supérieure

39 - Le polynôme P_n satisfaisant la relation $\cos(nx) = P_n(\cos x)$, vérifie

a) $\Phi_n(P_n) = nP_n + 1$

b) $\Phi_n(P_n) = -nP_n + P_n(0)$

c) $\Phi_n(P_n) = n^2 P_n + \cos(n\pi/2)$

d) $\Phi_n(P_n) = -n^2 P_n + P_n(0)$

40 - On note A_n la matrice de l'application Φ_n dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E_n, on a

a) $A_n = M_n B_n M_n^{-1}$ et A_n est une matrice diagonale

b) $A_n = M_n^{-1} B_n M_n$ et A_n est une matrice triangulaire inférieure

c) Les seuls coefficients non nuls de $A_n = M_n B_n M_n^{-1}$ sont sur la diagonale principale et sur la première ligne

d) Les seuls coefficients non nuls de $A_n = M_n^{-1} B_n M_n$ sont sur la diagonale principale et sur la première ligne