ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2007**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS
DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

Épreuve commune obligatoire de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 Heures
Coefficient : 2

Ce sujet comporte (dans l'énoncé d'origine, pas dans cette version) :
- 1 page de garde,
- 2 pages d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissement
- 10 pages de texte, numérotées de 1 à 10.

CALCULATRICE AUTORISÉE

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE

DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve « commune obligatoire de mathématiques » de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

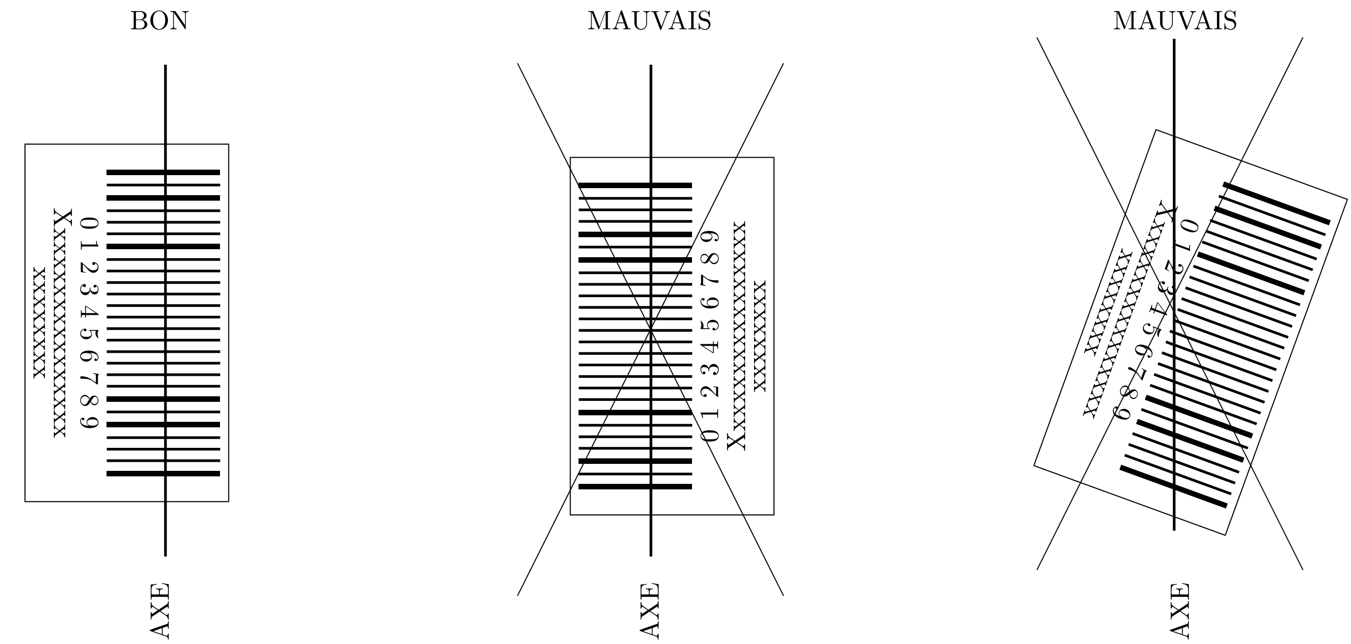
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve commune obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée avant l'énoncé du sujet lui-même.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- ► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
  vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- ► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
  vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.
- ► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
  vous devez alors noircir la case E.

Atttention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

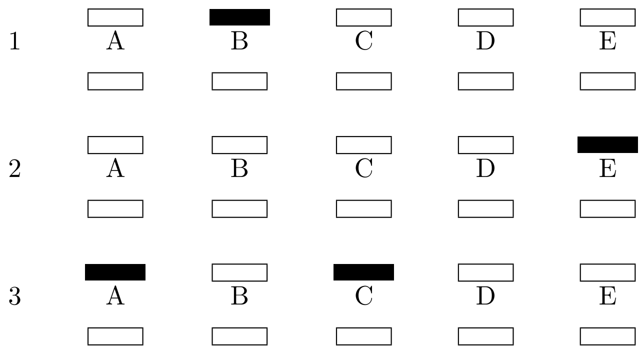
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

<u>Question 2</u> : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

<u>Question 3</u> : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D)2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENT

QUESTIONS LIÉES

1 à 14
15 à 33
34 à 40

PARTIE I

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (e_1,\, e_2,\, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet $(x,\, y,\, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le triplet $(x,\, -2\,x + 3\,y + z,\, 4\,x - 4\,y - z)$. id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice unité de l'ensemble, $M_3(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Question 1 : La matrice M de l'endomorphisme f par rapport à la base B s'écrit :

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

Question 2 : L'endomorphisme f est de rang :

A) inférieur ou égal à 3
B) inférieur ou égal à 2
C) 3 car le rang d'une matrice est égal au nombre de colonnes non nulles de cette matrice
D) 1 car une seule colonne de M a tous ses coefficients non nuls

Question 3 : La matrice M

A) est symétrique
B) est triangulaire par blocs
C) est inversible car l'endomorphisme f, étant de rang 3, est bijectif
D) est inversible car toute matrice de trace non nulle est inversible.

Question 4 : Le polynôme caractéristique $\chi = \det(M - \lambda\, I)$ de la matrice M

A) est de degré 3, car de manière générale, le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé
B) admet 1 pour racine car la somme des coefficients du polynôme est nulle
C) n'est pas divisible par λ car sinon sa trace serait nulle
D) est égal à $\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 3\,\lambda - 1$.

Question 5 : L'endomorphisme f

A) a pour valeur propre les racines de tout polynôme annulateur de f
B) ne peut admettre 0 pour valeur propre car f est un automorphisme
C) admet 2 valeurs propres -1 et $+1$
D) admet une valeur propre triple 1.

Question 6 : L'endomorphisme f

A) n'est pas diagonalisable sinon on aurait $f = \mathrm{id}$
B) est diagonalisable car f est bijectif
C) n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ car le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$
D) n'est pas diagonalisable car $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})) < 3$ mais est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ car le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Question 7 : On note λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs propres, éventuellement confondues, de l'endomorphisme f

A) le sous-espace $\mathrm{Ker}(f)$ admet pour base $(0,\, 1,\, -2)$

B) pour tout i entier entre 1 et 3, tout vecteur v_i de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(v_i) = \lambda_i\, v_i$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i

C) le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est le plan d'équation $-2\,x + 2\,y + z = 0$

D) le sous-espace propre associé à la valeur propre $+1$ est le plan d'équation $-2\,x + 2\,y + z = 1$

On considère la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 8 : On suppose qu'il existe une base $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f soit égale à N

A) la famille $(u_1,\, u_2)$ est une base du sous-espace $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$

B) l'endomorphisme de $f - \mathrm{id}$ est de rang 2

C) $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) = \mathbb{R}\, u_2$

D) le plus petit entier k tel que $(f - \mathrm{id})^k = 0$ est égal à 3.

Question 9 : A) On déduit de l'expression de la matrice $M - I$ que l'on peut prendre $u_2 = -2\,e_1 + 2\,e_2 + e_3$

B) On déduit de l'expression de la matrice $M - I$ que l'on peut prendre $u_2 = e_2 - 2\,e_3$

C) la famille $(u_1,\, u_2) = (e_1, -2\,e_1 + 2\,e_2 + e_3)$ est une base du sous-espace propre associé à 1

D) la famille $(u_1,\, u_2) = (e_1 + e_2, e_2 - 2\,e_3)$ est une base du sous-espace propre associé à 1.

Question 10 : On pose $u_3 = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3$ où a, b, c sont des réels, et on considère les vecteurs u_1 et u_2 définis dans la question 9. On note δ le déterminant du système de vecteurs $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ dans la base B.

A) $\delta = 2\,c - b$

B) $\delta = c - 2\,b + 2\,a$

C) $\delta = 2\,c - 3\,a + 3\,b$

D) $\delta = c + 2\,b + 2\,a$

Question 11 : Pour que la famille $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ considérée à la question 10 soit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à N

A) il faut et il suffit que $c + 2\,b - 2\,a$ soit non nul

B) il faut et il suffit que $c + 2\,b - 2\,a = 1$ et que $c + 2\,b + 2\,a$ soit non nul

C) il suffit de choisir $(a,\, b,\, c) = (0,\, 1,\, 0)$

D) il suffit de choisir $(a,\, b,\, c) = (1,\, 1,\, 1)$.

Question 12 : A) les matrices M et N ne peuvent être semblables car il n'existe pas de famille $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ constituant une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à N

B) les matrices M et N sont semblables car deux matrices de même rang sont nécessairement semblables

C) $M = P^{-1}\, N\, P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

D) $N = P^{-1}\, M\, P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 13 : On a :

A) $(M - I)^2 = 0$ car les matrices $(M - I)$ et $(N - I)$ sont semblables et $(N - I)^2 = 0$

B) $(M - I)^3 = 0$ et $(M - I)^2$ est non nulle

C) la formule du binôme s'applique au calcul de $(A + B)^n$ pour toute matrice A et B

D) pour appliquer la formule du binôme au calcul de $(A+B)^n$ il faut que les matrices A et B commutent.

Question 14 : On obtient :

A) $M^n = I + 2^n(M - I)$ pour tout entier naturel n

B) $M^n = I + (n/2)(M - I)$ pour tout entier naturel n

C) la suite de terme général M^n/n, pour n entier strictement positif, a pour limite $(M - I)$ lorsque n tend vers $+\infty$

D) la suite de terme général M^n/n, pour n entier strictement positif, a pour limite $(M - I)/2$ lorsque n tend vers $+\infty$

PARTIE II

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x\,(x-1)y''(x) + 3\,x\,y'(x) + y(x) = 0$$

Question 15 : A) les fonctions $x\,(x-1)$ et $3\,x$ étant continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2

B) les fonctions $1/(x\,(x-1))$ et $3/(x-1)$ étant continues sur $\mathbb{R} \setminus \{0,\, 1\}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1

C) les fonctions $1/\,(x\,(x-1))$ et $3/(x-1)$ étant continues sur $\mathbb{R} \setminus \{0,\, 1\}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,\, 1[$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2

D) les fonctions $1/\,(x\,(x-1))$ et $3/(x-1)$ étant continues sur $\mathbb{R} \setminus \{0,\, 1\}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,\, 0[$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Question 16 : On note, si elle existe, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ une solution de (E) développable en série entière de rayon R

A) (E) n'admet pas de solution développable en série entière au voisinage de 0

B) $(n+1)\,a_n - n\,a_{n+1} = 0$ pour tout entier naturel n

C) $((n+1)^2\,x - n\,(n-1))\,a_n = 0$ pour tout entier naturel n

D) $(n+1)\,a_n - n\,a_{n+1} = 0$ pour tout entier naturel strictement positif n et a_0 arbitraire.

Question 17 : Le rayon de convergence R de cette série entière solution de l'équation différentielle (E), si elle existe, est égal à :

A) 0 car la seule solution développable en série entière est la fonction nulle

B) 0 car la suite de terme général a_{n+1}/a_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

C) 1 car la suite de terme général a_{n+1}/a_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$

D) $+\infty$.

Question 18 : Une série entière de rayon de convergence R, réel strictement positif, est :

A) toujours normalement convergente sur l'intervalle $]-R,\, +R[$

B) toujours absolument et simplement convergente sur l'intervalle $]-R,\, +R[$

C) simplement convergente sur l'intervalle $]-R,\, +R[$ mais n'est pas nécessairement absolument convergente sur l'intervalle $]-R,\, +R[$

D) normalement convergente sur tout compact de l'intervalle $]-R,\, +R[$.

Question 19 : La suite (a_n), n entier naturel, des coefficients du développement d'une solution de l'équation différentielle (E) :

A) est définie par $a_0 = 0$ et $a_n = n\,a_1$ pour tout entier naturel strictement positif n, où a_1 est un réel quelconque

B) est définie pour tout entier naturel n par $a_n = n\,a_0$ où a_0 est un réel quelconque

C) est définie par $a_0 = 0$ et $a_n = (-1)^n\,n\,a_1$ pour tout entier strictement positif n, où a_1 est un réel quelconque

D) n'est pas définie car il n'existe pas de solution développable en série entière autre que la fonction nulle.

Question 20 : La fonction f solution de (E) développable en série entière

A) est nécessairement la fonction nulle

B) est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_1\, x/\big((1-x)^2\big)$

C) est définie sur $]-1, +1[$ par $f(x) = a_1\, x/\big((1+x)^2\big)$

D) est définie sur $]-1, +1[$ par $f(x) = a_1\, x/\big((1-x)^2\big)$.

> On considère les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, +1[$, $I_3 =]1, +\infty[$ et on note $\mathscr{S}_k$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur l'intervalle I_k pour k entier compris entre 1 et 3.

Question 21 : Une solution y_0 de l'équation (E) sur chacun des intervalles I_k, pour k entier compris entre 1 et 3,

A) est définie par $y_0(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

B) est définie par $y_0(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

C) n'existe pas

D) est nécessairement la fonction nulle.

Question 22 : En effectuant le changement de fonction inconnue défini sur I_k, pour k entier compris entre 1 et 3, par $y = z\, y_0$ où y_0 est la fonction définie dans la question 21 et y une solution de (E), on obtient

A) $z'' - \left\{2\,\frac{y_0'}{y_0} + \frac{3}{x-1}\right\} z' = 0$ pour tout x appartenant à I_k

B) $z'' + \left\{2\,\frac{y_0'}{y_0} + \frac{3}{x+1}\right\} z' = 0$ pour tout x appartenant à I_k

C) z' vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre

D) la fonction z n'est soumise à aucune condition.

Question 23 : On obtient alors, λ et μ désignant des réels et ln la fonction logarithme népérien, pour tout x appartenant à I_k, pour k entier compris entre 1 et 3 :

A) $z'(x) = \lambda\, \dfrac{x+1}{x^2}$

B) $z'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

C) $z(x) = \lambda \left(\ln|x| + \dfrac{1}{x}\right)$

D) $z(x) = \lambda \left(\ln|x| - \dfrac{1}{x}\right) + \mu$

Question 24 : Sur chacun des trois intervalles I_k, pour k entier compris entre 1 et 3, on obtient pour y solution de l'équation différentielle (E), λ et μ désignant des réels :

A) $y(x) = \lambda\, \dfrac{x\, \ln|x| + 1}{(x-1)^2}$

B) $y(x) = \lambda\, \dfrac{x\, \ln|x| + 1}{(x-1)^2} + \mu \dfrac{x}{(x-1)^2}$

C) $y(x) = \lambda\, \dfrac{x\, \ln|x| - 1}{(x+1)^2} + \mu \dfrac{x}{(x+1)^2}$

D) $y(x) = \dfrac{\lambda\,(x\, \ln|x| + 1) + \mu\, x}{(x-1)^2}$

Question 25 : Soit g une solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 1[$:

A) il n'existe pas de solution de (E) sur $]-\infty, 1[$ autre que la fonction nulle

B) g est continue sur $]-\infty, 1[$ mais n'est pas nécessairement dérivable en 0

C) g est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ telle que la restriction à I_1 (respectivement I_2) appartient à $\mathscr{S}_1$ (respectivement $\mathscr{S}_2$)

D) g est continue sur $]-\infty, 1[$ mais g' n'est pas nécessairement continue en 0.

Question 26 : La fonction g définie à la question 25, si elle existe, vérifie :

A) $g(x) = \dfrac{a\,(x\,\ln|x|+1)}{(x-1)^2} + \dfrac{b\,x}{(x-1)^2}$ où a et b sont des réels non nuls fixés

B) $g(x) = \dfrac{g(0)(x\,\ln|x|+1)}{(x-1)^2} + \dfrac{b\,x}{(x-1)^2}$ sur I_1 et $g(x) = \dfrac{g(0)(x\,\ln|x|+1)}{(x-1)^2} + \dfrac{c\,x}{(x-1)^2}$ sur I_2 avec b et c réels distincts

C) $g(0) = 0$ car sinon $|g'(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 ce qui est impossible puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$

D) $g(x) = \dfrac{\alpha\,x}{(x+1)^2}$, α réel quelconque, d'après la continuité de g' en 0.

Question 27 : L'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]-\infty, 1[$

A) est un espace vectoriel de dimension 1 dont la fonction g_0, définie par $g_0(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, est une base

B) est la droite vectorielle engendrée par la fonction g_0, définie par $g_0(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

C) est un espace vectoriel de dimension 2 comme ensemble de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre

D) est l'espace vectoriel nul.

Question 28 : Soit h une solution de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

A) il n'existe pas de solution de (E) sur $]0, +\infty[$ autre que la fonction nulle

B) h n'est pas continue en 1

C) h est continue sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1

D) h est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ mais h' n'est pas nécessairement continue en 1.

Question 29 : On note ℓ la fonction $\ell(x) = a\,(x\,\ln(x)+1) + b\,x$:

A) ℓ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

B) le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 2 de la fonction ℓ s'écrit

$$(a+b) + (a+b)(x-1) + \frac{a}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

C) le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 2 de la fonction ℓ s'écrit

$$(a+b) + (a+b)x + \frac{a}{2}x^2 + o(x^2)$$

D) la fonction $\dfrac{\ell(x)}{(x-1)^2}$ a une limite finie en 1 si et seulement si $b = -a$ et cette limite est dans ce cas égale à $\dfrac{a}{2}$.

Question 30 : Les seules solutions possibles de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sont les fonctions h définies par, a étant un réel fixé :

A) $h(x) = a\,\dfrac{(1-x)+x\,\ln(x)}{(x-1)^2}$ pour x différent de 1 et $h(1) = \dfrac{a}{2}$

B) $h(x) = a\,\dfrac{(1-x)+x\,\ln(x)}{(x-1)^2}$ pour x différent de 1 et $h(1) = -\dfrac{a}{2}$

C) $h(x) = a\,\dfrac{(1+x)+x\,\ln(x)}{(x-1)^2}$ pour x différent de 1 et $h(1) = \dfrac{a}{2}$

D) $h(x) = a\,\dfrac{(x-1)+x\,\ln(x)}{(x-1)^2}$ pour x différent de 1 et $h(1) = \dfrac{a}{2}$.

Question 31 : Une solution h de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$, a étant un réel fixé :

A) ne peut être développable en série entière au voisinage de 1

B) est développable en série entière au voisinage de 1 de rayon de convergence 1

C) s'écrit $a\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right](x-1)^n$ pour tout x appartenant à $]0, 2[$

D) s'écrit $a\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right]x^n$ pour tout x appartenant à $]0, 1[$.

Question 32 : Toute solution h de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

A) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, 2[$ mais ne peut être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

B) est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ mais ne peut être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ car toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière

C) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$ mais ne peut être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

D) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et développable en série entière au voisinage de 1 donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 2[$.

Question 33 : On en conclut que :

A) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$ est l'espace vectoriel nul

B) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction h_0, définie par

$$h_0(x) = \frac{(1-x) + x\,\ln(x)}{(x-1)^2}$$

pour x différent de 1 et $h_0(x) = \dfrac{1}{2}$

C) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ est une droite vectorielle

D) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ est réduit à la fonction nulle.

PARTIE III

On considère la fonction g de la variable réelle x définie, lorsqu'elle existe, par $g(x) = \dfrac{x^n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ pour tout n entier naturel.

Question 34 : Pour tout entier naturel n, on a :

A) la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$

B) la fonction g est définie et continue sur $[0, +\infty[\setminus\{1\}$

C) la fonction g est définie, continue et positive sur $[0, 1[$

D) $]-1, +1[$ est le plus grand intervalle sur lequel la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Question 35 : La fonction g

A) est, pour tout n entier naturel, intégrable sur $]0, 1[$ car toute fonction positive et continue sur un intervalle ouvert est intégrable sur cet intervalle ouvert

B) est, pour tout n entier naturel, intégrable sur $[0, 1[$ car g est positive, continue sur $[0, 1[$ et équivalente au voisinage de 1 à $\dfrac{1}{\big(2\,(1-x)\big)^{1/2}}$ fonction intégrable sur $]-\infty, 1[$

C) n'est pas intégrable sur $[0, 1[$ car la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 1

D) est, pour tout n entier naturel, intégrable sur $]-1, +1[$ car g est continue sur $]-1, +1[$ et $|g|$ est équivalente au voisinage de 1 à $\dfrac{1}{\big(2\,(1-x)\big)^{1/2}}$ et à $\dfrac{1}{\big(2\,(1+x)\big)^{1/2}}$ au voisinage de -1, fonctions intégrables sur $]-1, +1[$.

On considère, si elle existe, la série de terme général u_n défini par $u_n = \displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}\,x$ pour tout entier positif ou nul n

Question 36 : Pour tout n entier naturel, on obtient, en posant le changement de variable

A) $x = \sin(t), \quad u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\, t)^n \mathrm{d}\, t$

B) $x = \sin(t), \quad u_n = -\int_0^{\pi/2} (\sin\, t)^n \mathrm{d}\, t$

C) $x = \cos(t), \quad u_n = -\int_0^{\pi/2} (\cos\, t)^n \mathrm{d}\, t$

D) $x = \cos(t), \quad u_n = -\int_0^{1} (\cos\, t)^n \mathrm{d}\, t$

Question 37 : On considère, si elle existe, la suite de terme général $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\, t)^n \mathrm{d}\, t$, n entier naturel

A) I_n est définie pour tout n entier naturel car la fonction $(\sin\, t)^n$ est continue et positive sur le segment $[0,\, \pi/2]$ donc intégrable sur $[0,\, \pi/2]$ pour tout n entier naturel

B) $I_1 = 1 = I_0$

C) la suite de terme général I_n est décroissante mais n'est pas strictement décroissante

D) la suite de terme général I_n est strictement décroissante car $I_n - I_{n-1} < 0$ pour tout entier n strictement positif.

Question 38 : La suite (I_n), n entier naturel, vérifie la relation

A) $I_n = n\,(n-1)\, I_{n-2}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2

B) $I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2

C) $I_n = \frac{n}{n-1}\, I_{n-2}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2

D) $I_n = n\,(n-1)\, I_{n-1}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1

Question 39 : On obtient alors pour tout entier positif ou nul p

A) $I_p = p!\, \frac{\pi}{2}$

B) $I_{2\,p+1} = 0$

C) $I_{2\,p+1} = (2\,p)!\, \dfrac{\pi}{2^{2\,p+1} (p!)^2}$

D) $I_{2\,p} = \dfrac{(2\,p+1)\,(2\,p-1)\cdots 3}{(2\,p)\,(2\,p-2)\cdots 2}$.

Question 40 : On en déduit :

A) la suite de terme général $n\, u_n$ est équivalente à π et donc la série à termes positifs de terme général u_n, n entier naturel, est divergente

B) la suite de terme général $n\, u_n^2$ est équivalente à π car, pour tout n entier strictement positif, $n\, u_{n-1}\, u_n = \pi$

C) la suite de terme général u_n est équivalente à $\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, par conséquent la série à termes positifs de terme général u_n, n entier naturel, est divergente

D) la série de terme général u_n, n entier naturel, est convergente.