ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2008**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS
DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

Épreuve optionnelle obligatoire de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

Ce sujet comporte (dans l'énoncé d'origine, pas dans cette version) :
1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM
1 page d'avertissement
11 pages de texte recto/verso

<u>CALCULATRICE AUTORISÉE</u>

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve « optionnelle obligatoire de mathématiques » de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

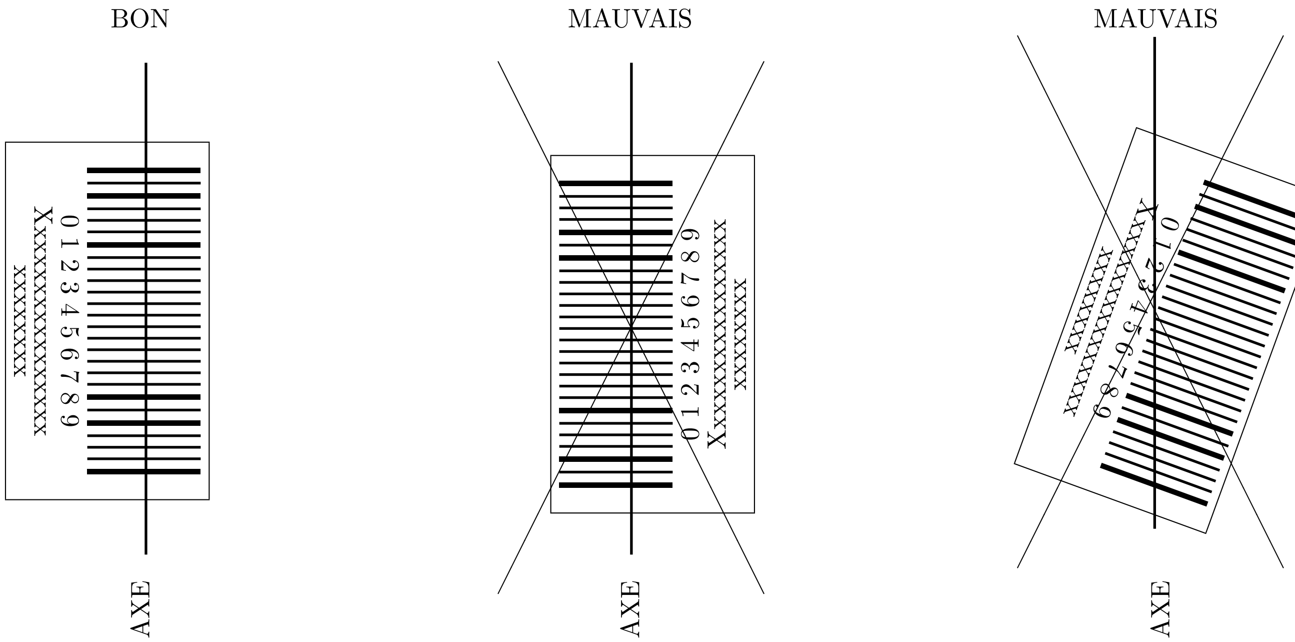
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve optionnelle obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.
5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée au début du texte du sujet.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne :
vous devez alors noircir la case e.

Atttention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

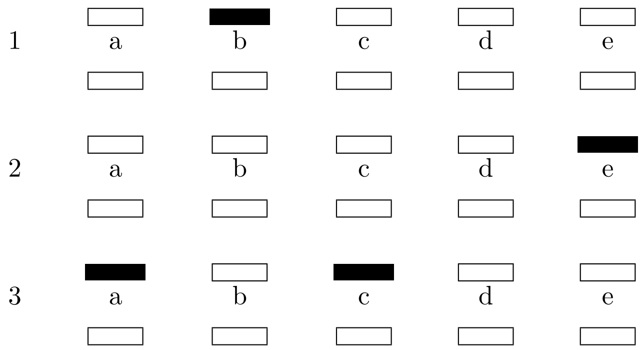
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
a) 3 b) 5 c) 4 d) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
a) -3 b) -1 c) 4 d) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
a) 1 b) 0 c) -1 d)2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENT

QUESTIONS LIÉES

1 à 30
31 à 40

PARTIE I

Dans cette partie, on identifie les polynômes à coefficients réels et les fonctions polynômes associées.

On considère pour tout entier naturel n et pour x réel l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ où $f(t) = e^{-t}/t^{n+1}$.

Question 1 : Pour tout entier naturel n

a) l'intégrale impropre converge pour x réel strictement positif mais la fonction f n'est pas intégrable sur $[x, +\infty[$

b) la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$

c) la fonction f est intégrable sur $]x, +\infty[$ pour x réel car toute fonction admettant une limite nulle en $+\infty$ est intégrable

d) la fonction f est intégrable sur $]x, +\infty[$ pour x réel strictement positif car la fonction e^{-t}/t^{n+1} est positive, continue sur $]0, +\infty[$ et équivalente à l'infini à e^{-t}

$\boxed{\text{On note } I_n(x) \text{ la valeur de cette intégrale impropre lorsqu'elle est définie.}}$

Question 2 : On a alors pour tout n entier naturel

a) $0 < I_n(x) < f(x)$ pour tout x réel

b) $0 < I_n(x) < 1/x^{n+1}$ pour tout x réel strictement positif

c) $I_n(x)$ s'annule pour au moins un réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$

d) $0 < I_n(x) < 1/e$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$

Question 3 : La fonction I_n, pour tout n entier naturel,

a) vérifie $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ pour x réel strictement positif

b) vérifie $I_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$ pour x réel supérieur ou égal à 1 seulement

c) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $-f(x)$ car la fonction f est continue

d) n'est dérivable que sur l'intervalle $[1, +\infty[$

$\boxed{\text{On considère la fonction } \varphi \text{ définie, si elle existe, par } \varphi(x) = e^x I_0(x).}$

Question 4 : On peut écrire, pour tout n entier naturel, $\varphi(x)$ sous la forme $f_n(x) + (-1)^n n! e^x I_n(x)$

a) pour tout x réel positif ou nul avec $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)!/x^k$ pour tout n strictement positif et $f_0(x) = 0$

b) pour tout x réel strictement positif avec $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k}(k-1)!/x^k$ pour tout n strictement positif et $f_0(x) = 0$

c) pour tout x réel strictement positif avec $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k}(k+1)!/x^{k+1}$ pour tout n strictement positif et $f_0(x) = 0$

d) pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$ avec $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)!/x^k$ pour tout n strictement positif et $f_0(x) = 0$, car $I_n(x) = f(x) - (n+1)I_{n+1}(x)$

On dira qu'une application φ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre n en $+\infty$ s'il existe des constantes $a_0, \ldots, a_n$ et une fonction ε_n tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ telles que l'on ait pour tout x réel strictement positif, $\psi(x) = a_0 + (a_1/x) + \cdots + (a_n/x^n) + (\varepsilon_n(x)/x^n)$.

Question 5 : La fonction ψ admet un développement limité en $+\infty$

a) à un ordre au plus égal à 3

b) à tout ordre n, entier strictement positif, avec $a_n = (-1)^n n!$ pour n entier supérieur ou égal à 1 et $a_0 = 0$

c) à tout ordre n, entier strictement positif, avec $a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$ pour n entier supérieur ou égal à 1 et $a_0 = 0$

d) à tout ordre n, entier strictement positif, avec $a_n = (-1)^n (n-1)!$ pour n entier supérieur ou égal à 1 et $a_0 = 0$ et $|\varepsilon_n(x)| < n!/x$ pour tout x réel strictement positif

Question 6 : Pour tout x réel strictement positif, la série de terme général $u_n = a_n/x^n$, où a_n représente le coefficient de $1/x^n$ dans le développement limité de φ en $+\infty$,

a) converge car φ admet un développement limité à tout ordre et on a, $\exists A > 0$ tel que $\forall x > A$ alors $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n/x^n$

b) diverge car, pour tout n entier naturel, $u_{n+1}/u_n = (n+1)/x$ suite de limite strictement supérieure à 1

c) diverge car la série de terme général $|u_n|$ diverge, la suite $(|u_n|)$ ne convergeant pas vers 0

d) diverge car la suite u_{n+1}/u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Question 7 : Pour tout x réel strictement positif et pour tout couple d'entiers naturels (p, q) la suite $(f_n(x))$ est telle que

a) $f_{2q+1}(x) < \varphi(x) < f_{2p}(x)$

b) $f_{2p}(x) < \varphi(x) < f_{2q+1}(x)$

c) la sous-suite $(f_{2p}(10))$ est décroissante pour tout entier naturel p et la sous-suite $(f_{2q+1}(10))$ est croissante pour tout q entier naturel

d) la sous-suite $(f_{2p}(10))$ est croissante pour p inférieur ou égal à 5 et décroissante pour p supérieur ou égal à 5 car $f_{2p}(10) - f_{2p-2}(10) = (2p-2)!(11-2p)/10^{2p}$

On considère pour tout entier naturel m et pour x réel l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} m!(t-x)^n e^{-t}/t^{m+1}\ \mathrm{d}t$.

Question 8 : Cette intégrale impropre est

a) divergente pour x réel négatif ou nul

b) convergente pour x réel car $0 \leqslant (t-x)^m e^{-t}/t^{m+1} \leqslant e^{-t}$

c) absolument convergente pour x réel strictement positif car toute fonction continue sur $]0, +\infty[$ a une intégrale impropre convergente sur $]0, +\infty[$

d) absolument convergente pour x strictement positif car la fonction est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie $0 \leqslant (t-x)^m e^{-t}/t^{m+1} \leqslant e^{-t}$ pour tout t supérieur ou égal à $\sup(x, 1)$.

On note $J_m(x)$ la valeur de cette intégrale lorsqu'elle est définie.

Question 9 : On peut exprimer $J_m(x)$, pour tout m entier naturel, sous la forme

a) $J_m(x) = \sum\limits_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} x^p I_p(x)$ pour tout x réel strictement positif

b) $J_m(x) = m! \sum\limits_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} x^p I_p(x)$ pour tout x réel positif

c) $J_m(x) = \sum\limits_{p=0}^{m} (-1)^p \left((m!)^2/(m-p)!p!\right) x^p I_p(x)$ pour tout x réel strictement positif

d) $J_m(x) = (t-x)^m I_m(x)(m!)$ pour tout x réel strictement positif

Question 10 : La fonction J_m vérifie, pour m entier naturel,

a) est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$

b) est 2 fois dérivable sur $]0, +\infty[$ seulement

c) $J_0'(x) = e^{-x}/x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

d) $J_0'(x) = -e^{-x}/x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ et $J_0'(0) = -1$

Question 11 : Pour tout entier strictement positif m, la dérivée J'_m de J_m, lorsqu'elle existe, peut s'écrire sous la forme

a) $J'_m(x) = m! \sum_{p=0}^{m} (-1)^p p\binom{m}{p} x^{p-1} I_p(x) - m! \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} (e^{-x}/x)$

b) $J'_m(x) = m!m \int_x^{+\infty} (t-x)^{m-1} e^{-t}/t^{m+1} \ \mathrm{d}t$

c) $J'_m(x) = -m!m \int_x^{+\infty} (t-x)^{m-1} e^{-t}/t^{m+1} \ \mathrm{d}t$

d) $J'_m(x) = 0$

Question 12 : La fonction J_m vérifie, pour tout entier m inférieur ou égal à 1, la relation

a) $xJ'_m(x) = mJ_m(x) - m^2 J_{m-1}(x)$ pour tout x réel positif

b) $J'_m(x) = \left(mJ_m(x) - m^2 J_{m-1}(x)\right)/x$ pour tout x réel strictement positif

c) $xJ'_m(x) = m^2 J_m(x) - mJ_{m-1}(x)$ pour tout x réel strictement positif

d) $J_m(x) = mJ_{m-1}(x)$ pour tout x réel strictement positif

Question 13 : La fonction J_m vérifie une relation de la forme $J'_m(x) = \alpha_m J_{m-1}(x) - \beta_m J'_{m-1}(x)$

a) uniquement pour m supérieur ou égal à 2 et x strictement positif avec $\alpha_m = \beta_m = m$

b) pour m supérieur ou égal à 1 et x positif avec $\alpha_m = \beta_m = m$

c) pour m supérieur ou égal à 1 et x strictement positif avec $\alpha_m = 0$ et $\beta_m = m$

d) pour m supérieur ou égal à 1 et x strictement positif avec $\alpha_m = \beta_m = m$

Question 14 : La suite $(J_m(x))$ vérifie la relation de récurrence

a) $J_{m+1}(x) = (2m+1)J_m(x) - m^2 J_{m-1}(x)$ pour tout x strictement positif et pour tout m entier supérieur ou égal à 1

b) $J_{m+1}(x) = (2m+1+x)J_m(x) - m^2 J_{m-1}(x)$ pour tout x réel et pour tout m entier supérieur ou égal à 1

c) $J_{m+1}(x) = (2m+1+x)J_m(x) - m^2 J_{m-1}(x)$ pour tout x strictement positif et pour tout m entier supérieur ou égal à 1

d) $(m+1)J_{m+1}(x) = (m^2+1+x)J_m(x) - mJ_{m-1}(x)$ pour tout x strictement positif et pour tout m entier supérieur ou égal à 1

Question 15 : La fonction J_m est solution de l'équation différentielle

a) $xy'' + (x+1)y' - my = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout m entier naturel

b) $xy'' + (x+m^2+2)y' - m^2 y = 0$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout m entier naturel

c) $y'' + ((x+1)/x)\, y' - (m/x)\, y = 0$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout m entier naturel car $J''_0(x) = -e^{-x}\left((1/x) + (1/x^2)\right)$

d) $xy'' + (x+1)y' - my = 0$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout m entier strictement positif

On considère l'équation différentielle (E_1) $xy'' + \left(x + \lambda^2 + 2\right) y' - \lambda^2 y = 0$ où λ est un réel

Question 16 : On note, si elle existe, $y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de (E_1) développable en série entière de rayon de convergence R_1.

a) (E_1) n'admet de solution développable en série entière pour aucun réel λ

b) pour tout n entier naturel et pour tout λ réel, $a_{n+1} = (\lambda^2 - n)a_n / \left((\lambda^2+n+2)(n+1)\right)$

c) pour tout n entier naturel et pour tout λ réel, $a_{n+1} = -(\lambda^2 - n)a_n / \left((\lambda^2+n+2)(n+1)\right)$

d) le rayon de convergence R_1 de cette série est infini

Question 17 : De manière générale, un développement en série entière de rayon de convergence non nul R

a) converge normalement donc uniformément sur l'intervalle $]-R, R[$

b) converge uniformément mais ne converge pas normalement sur $]-R, R[$

c) converge normalement mais ne converge pas uniformément sur tout compact de $]-R, R[$

d) ne peut pas converger uniformément sur l'intervalle $]-R, R[$

On considère l'équation différentielle (E_2) $xy'' + (x+1)y' - my = 0$ où m est un réel.

Question 18 : On note, si elle existe, $y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ une solution de (E_2) développable en série entière de rayon de convergence R_2

a) (E_2) n'admet de solution développable en série entière pour aucun réel m

b) pour tout n entier naturel et pour tout m réel, $b_{n+1} = (m+n)b_n/(n+1)^2$

c) pour tout n entier naturel et pour tout m réel, $b_{n+1} = -(m-n)b_n/(n+1)^2$

d) pour m réel non entier, le rayon de convergence de cette série est infini car la suite b_{n+1}/b_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

Question 19 : L'équation différentielle (E_2)

a) admet, pour au moins un réel m, une solution développable en série entière non polynomiale

b) n'admet comme solution que des fonctions polynômes

c) admet, pour tout m réel, au moins une solution polynomiale de degré m à coefficients non entiers

d) admet, pour tout m réel, au moins une solution polynomiale de degré m à coefficients entiers

On note g_m une solution polynomiale, si elle existe, de l'équation différentielle (E_2) de la forme

$$g_m(x) = \sum_{p=0}^{m} \alpha_{m,p} x^p \text{ telle que } \alpha_{m,m} = 1 \text{ pour } m \text{ entier strictement positif.}$$

Question 20 : Les coefficients $\alpha_{m,p}$ pour m entier strictement positif et p compris entre 0 et m sont tels que

a) $\alpha_{m,p} = (m!)^2/\big((p!)^2(m-p)!\big)$

b) $\alpha_{m,p} = m(m-1)\dots(p+1)$

c) on pose $g_0(x) = 1$ car le polynôme constant 1 est l'unique solution de $xy'' + (x+1)y' = 0$

d) on pose $g_0(x) = 1$ car le polynôme 1 vérifie l'équation (E_2) pour $m = 0$

Question 21 : Pour tout entier strictement positif m et tout réel x strictement positif, on cherche à écrire $J_m(x)$ sous la forme $J_m(x) = g_m(x)I_0(x) - h_m(x)e^{-x}$ (1)

a) il n'existe pas de fonction h_m telle que (1) soit vérifiée

b) il existe plusieurs fonctions h_m vérifiant (1)

c) il existe une unique fonction polynôme h_m de degré m vérifiant (1)

d) il existe une fonction polynôme vérifiant (1) telle que $h_0(x) = 0$ et $h_m(x) = \sum_{p=0}^{m} \alpha_{m,p} x^p f_p(x)$

Question 22 : Pour m entier strictement positif, la fonction h_m si elle existe

a) est la partie entière de la fonction rationnelle $g_m f_m$

b) est égale à la fonction $g_m(x)f_m(x) + \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_{m,p} x^p \left(f_m(x) - f_p(x)\right)$

c) vérifie pour tout m entier strictement positif et pour x réel strictement positif $h_{m+1}(x) = (x+2m+1)h_m(x) - m^2 h_{m-1}(x)$ car $g_m(x)$ vérifie $g_{m+1}(x) = (x+2m+1)g_m(x) + m^2 g_{m-1}(x)$

d) vérifie pour tout m entier strictement positif et pour x réel strictement positif $h_{m+1}(x) = (x+2m+1)h_m(x) - m h_{m-1}(x)$ car $g_m(x)$ vérifie $g_{m+1}(x) = (x+2m+1)g_m(x) - m g_{m-1}(x)$

Question 23 : On a pour $m = 3$

a) $h_m(x) = x^2 + 8x + 13$ pour $x > 0$

b) $h_m(x) = x^2 + 8x + 11$ pour tout x réel car $h_1(x) = 1$ et $h_2(x) = x + 3$

c) $h_m(x) = x^2 + 8x - 11$ pour tout x réel strictement positif

d) $h_m(x) = 2x^2 + 16x + 22$ pour $x > 0$

Question 24 : Pour m entier naturel, on a les inégalités

a) $(t-x)^{m-1}e^{-t}/t^{m+1} < e^{-t}/x$ pour tout t réel et pour tout x réel strictement positif

b) $J_m(x) < m!e^{-x}/x$ pour tout x réel positif et pour tout t strictement supérieur à x

c) $0 < J_m(x) < m!e^{-x}/x$ pour tout x réel strictement positif

d) pour tout x réel strictement positif, $g_m(x) > m!mx$ car les coefficients $\alpha_{m,p}$ sont strictement positifs

Question 25 : x étant un réel fixé supérieur ou égal à 1, la suite $e^x J_m(x)/g_m(x)$

a) converge vers 0 car $0 < e^x J_m(x)/g_m(x) < 1/mx^2$

b) diverge car $J_m(x) > m!$

et la suite $(h_m(x)/g_m(x))$, pour x réel strictement positif fixé

c) converge vers $\varphi(x)$ car $h_m(x)/g_m(x) = (e^x J_m(x)/g_m(x)) - \varphi(x)$

d) diverge car $h_m(x)/g_m(x) = \varphi(x) - (e^x J_m(x)/g_m(x))$

Question 26 : Pour tout entier naturel m, on a

a) $0 < (h_m(x)/g_m(x)) - \varphi(x) < m!/(xg_m(x))$ pour tout x réel non nul

b) $0 < (h_m(x)/g_m(x)) - \varphi(x) < m!/x^{m+1}$ pour tout x réel strictement positif

c) lorsque x tend vers $+\infty$, $h_m(x)/g_m(x) - f_m(x)$ est négligeable devant $1/x^m$ car $\varphi(x) - f_m(x) = \varepsilon_m(x)/x^{m+1}$ avec $\varepsilon_m(x)$ qui tend vers 0

d) lorsque x tend vers $+\infty$, $h_m(x)/g_m(x) - \varphi(x)$ est négligeable devant $1/x^m$

Question 27 : On pose, pour tout entier naturel m, $D_m(x) = h_{m+1}(x)g_m(x) - h_m(x)g_{m+1}(x)$ lorsque cette fonction existe, on a alors

a) $D_m(x) = m^2 D_{m-1}(x)$ pour tout x réel positif

b) $D_m(x) = mD_{m-1}(x)$ pour tout x réel strictement positif

c) $D_m(x) = (m!)^2$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$ et les polynômes h_m et g_m sont premiers entre eux

d) $D_m(x) = m!$, car $D_0(x) = 1$ pour tout x réel strictement positif

Question 28 : La suite $(h_m(x)/g_m(x))$, m entier naturel

a) est strictement croissante pour x strictement positif

b) est strictement décroissante pour x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$

et lorsque x tend vers $+\infty$, un équivalent de $(h_{m+1}(x)/g_{m+1}(x)) - (h_m(x)/g_m(x))$ est

c) $m!/x^{2m+1}$

d) $(m!)^2/x^{2m}$

Question 29 : L'entier strictement positif m étant fixé, un équivalent de la fonction $(h_{2m}(x)/g_{2m}(x)) - (h_m(x)/g_m(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$ s'écrit

a) $m!/x^{2m}$

b) $(m!)^2/x^{2m+1}$

et la fonction $(h_m(x)/g_m(x)) - \varphi(x)$ est, lorsque x tend vers $+\infty$,

c) équivalente à $1/x^{2m}$

d) négligeable devant $1/x^{2m}$ car $(h_m(x)/g_m(x)) - f_{2m}(x) = o\left(1/x^{2m}\right)$

Question 30 : L'entier strictement positif m étant fixé, on considère 2 polynômes à coefficients réels P et Q tels que le degré de Q soit inférieur ou égal à m et que $(P(x)/Q(x)) - \varphi(x)$ soit, lorsque x tend vers $+\infty$, négligeable devant $1/x^{2m}$

a) $(P(x)/Q(x)) - (h_m(x)/g_m(x)) = o\left(1/x^{2m}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$

b) $P(x)g_m(x) - Q(x)h_m(x) = 0$ pour tout x strictement positif car la fonction $\left|x^{2m}/(Q(x)g_m(x))\right|$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

c) g_m divise Q car g_m et h_m sont premiers entre eux

d) h_m divise Q et g_m divise P

PARTIE II

Dans cette partie, on notera $\overline{z}$ le conjugué du complexe z.

On considère deux matrices A et B dans l'ensemble $M_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes. A et B sont telles que $AB = BA$. On note f et g les endormophismes de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ canoniquement associés à A et B respectivement.

Question 31 : On a

a) tout sous-espace propre de f est stable par g et inversement

b) tout sous-espace propre de f est stable par g mais l'inverse n'est pas vrai

c) les sous-espaces propres de f et g sont identiques

d) les sous-espaces propres de f ne sont pas stables par g

Question 32 : On suppose que l'endomorphisme f a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2

a) les endomorphismes f et g ne sont pas diagonalisables

b) les endomorphismes f et g sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de f et ils ont même spectre

c) les endomorphismes f et g ne peuvent être diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^2$

d) l'endomorphisme f est diagonalisable mais g ne l'est pas nécessairement

Question 33 : On suppose toujours que l'endomorphisme f a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2

a) il ne peut pas exister de polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ et de matrice D de $M_2(\mathbb{C})$ tels que
$$A = P(D) \text{ et } B = Q(D)$$

b) il existe deux polynômes P et Q de degré 1 de $\mathbb{C}[X]$ et une matrice D de $M_2(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$

c) le polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ défini par $P(X) = ((\lambda_1 + \lambda_2)/2) + ((\lambda_1 - \lambda_2)/2)\, X$ est tel que $A = P(D)$ et $B = P(D)$ avec $D = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^{-1}$ où U est la matrice diagonalisante de A et B

d) les polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ définis par $P(X) = ((\lambda_1 + \lambda_2)/2) + ((\lambda_1 - \lambda_2)/2)\, X$ et $Q(X) = ((\mu_1 + \mu_2)/2) + ((\mu_1 - \mu_2)/2)\, X$, μ_1 et μ_2 désignant les valeurs propres de g, sont tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Question 34 : On suppose que les endomorphismes f et g ont tous deux une valeur double que l'on notera respectivement λ et μ.

a) les endomorphismes f et g sont nécessairement diagonalisables dans $\mathbb{C}$

b) les endomorphismes f et g ne sont pas trigonalisables dans $\mathbb{C}$

c) les endomorphismes f et g ont un vecteur propre commun car l'endomorphisme g_1 induit par g sur le sous-espace $\text{Ker}(f - \lambda id)$ admet au moins un vecteur propre u

d) les endomorphismes f et g n'ont pas de vecteur propre commun

Question 35 : On suppose toujours que les spectres des endomorphismes f et g sont respectivement égaux à $\{\lambda\}$ et $\{\mu\}$

a) il ne peut pas exister de polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ et de matrice D de $M_2(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$

b) il n'existe pas de polynômes P et Q de degré 1 de $\mathbb{C}[X]$ et de matrice D de $M_2(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$

c) le polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ défini par $P(X) = \lambda + \lambda X$ est tel que $A = P(D)$ et $B = P(D)$ avec $D = U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1}$ où U est la matrice diagonalisante de A et B

d) les polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ définis par $P(X) = \lambda + \alpha X$ et $Q(X) = \mu + \beta X$ sont tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$ avec $D = U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1}$, U matrice de $GL_2(\mathbb{C})$ vérifiant $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $U^{-1}BU = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Question 36 : On suppose que A et B sont des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels où la matrice A n'a pas de valeur propre réelle.

a) les valeurs propres de A sont complexes conjuguées et les valeurs propres de B peuvent être réelles

b) les valeurs propres de A et de B sont complexes non réelles et conjuguées

c) les spectres des matrices A et B sont égaux

d) les matrices A et B sont diagonalisables dans $M_2(\mathbb{C})$ dans une même base et les colonnes de la matrice diagonalisante U sont conjuguées

Question 37 : On suppose toujours que A et B sont des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels où la matrice A n'a pas de valeur propre réelle. On note λ_1, λ_2 (respectivement μ_1, μ_2) les valeurs propres de A (respectivement B). On a

a) $A = \left(\left(\lambda_1 + \overline{\lambda_1}\right)/2\right) I + \left(\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}\right)/2i\right) D$ avec $D = iU^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} U$ qui appartient à $M_2(\mathbb{R})$

b) $A = \left(\left(\lambda_1 + \overline{\lambda_1}\right)/2\right) I + \left(\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}\right)/2i\right) D$ avec $D = U^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} U$ qui n'appartient pas à $M_2(\mathbb{R})$

c) il ne peut pas exister de polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ et de matrice D de $M_2(\mathbb{R})$ tels que
$$A = P(D) \text{ et } B = Q(D)$$

d) il existe une matrice D de $M_2(\mathbb{R})$ telle que les polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ définis par $P(X) = \left(\left(\lambda_1 + \overline{\lambda_1}\right)/2\right) + \left(\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}\right)/2i\right) X$ et $Q(X) = \left(\left(\mu_1 + \overline{\mu_1}\right)/2\right) + \left(\left(\mu_1 - \overline{\mu_1}\right)/2i\right) X$ vérifient $A = P(D)$ et $B = Q(D)$

Question 38 : On suppose dans cette question que A et B sont des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels où les deux matrices A et B ont chacune une valeur propre double que l'on notera respectivement λ et μ. On note f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement

a) les endomorphismes f et g sont diagonalisables dans $\mathbb{C}$ mais pas nécessairement dans $\mathbb{R}$

b) les endomorphismes f et g ne sont pas trigonalisables dans $\mathbb{R}$

c) les endomorphismes f et g ont un vecteur propre commun car le polynôme caractéristique de l'endomorphisme g_1 induit par g sur $\mathrm{Ker}(f - \lambda id)$ divise celui de g donc est scindé dans $\mathbb{R}[X]$

d) les endomorphismes f et g n'ont pas de vecteur propre commun

On considère deux matrices M et N de $M_3(\mathbb{C})$ définies par $M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $M_3(\mathbb{C})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes.

Question 39 : On suppose qu'il existe une matrice D de $M_3(\mathbb{C})$ de coefficients $(d_{i,j})$, i et j entiers compris entre 1 et 3, et deux polynômes P, Q dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $M = P(D)$ et $N = Q(D)$. On a

a) les matrices M et N sont diagonalisables dans $M_3(\mathbb{C})$

b) $\mathrm{Vect}\left(D^n, n \text{ entier naturel}\right) = \mathrm{Vect}\left(I, D, D^2\right)$ car d'après le théorème de Cayley-Hamilton D^3 appartient à $\mathrm{Vect}\left(I, D, D^2\right)$

c) les spectres des matrices M et N sont égaux à l'ensemble $\{0, 1\}$

d) $d_{2,1} = d_{2,3} = d_{3,1} = d_{3,2} = 0$ et $d_{1,1} = d_{2,2} = d_{3,3}$ car les matrices A et D, respectivement B et D, sont commutables puisque A et B sont des polynômes en D

Question 40 : Soit A et B deux matrices de l'ensemble $M_3(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

a) Il n'existe pas de polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ et de matrice D de $M_3(\mathbb{C})$ tels que
$$A = P(D) \text{ et } B = Q(D)$$

b) Il n'existe pas de polynômes P et Q de degré 1 de $\mathbb{C}[X]$ et de matrice D de $M_3(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$

c) Il existe deux polynômes P et Q de degré 1 de $\mathbb{C}[X]$ et une matrice D de $M_3(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$

d) Il existe deux polynômes P et Q de degré 2 de $\mathbb{C}[X]$ et une matrice D de $M_3(\mathbb{C})$ tels que $A = P(D)$ et $B = Q(D)$