CORRIGÉ ICNA Épreuve commune 2010

PARTIE I

1. D'après le cours sur l'expression analytique d'une application linéaire, on peut écrire que la matrice $M_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la b.o.n $\mathscr{B}$ est

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

La matrice de cet endomorphisme *dans une base orthonormale* étant symétrique, on en déduit que $f_{a,b}$ est autoadjoint (ou symétrique). La définition d'un endomorphisme autoadjoint correspond à la réponse D.

La relation de la réponse A correspond à la définition d'un *projecteur* .

La relation de la réponse B découle de la symétrie du produit scalaire, donc ne prouve rien !

Conclusion :

Q1 : Réponse D

---

2. Déjà fait.

Q2 : Réponse C

---

3. La matrice $M_{a,b}$ peut s'écrire par blocs sous la forme :

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} aA & bA \\ bA & aA \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$, les opérations élémentaires $C_3 \longleftarrow C_3 - \dfrac{b}{a} C_1$ et $C_4 \longleftarrow C_4 - \dfrac{b}{a} C_2$ montrent que

$$\det(M_{a,b}) = \begin{vmatrix} aA & 0 \\ bA & \left(a - \frac{b^2}{a}\right) A \end{vmatrix} = (\det aA) \cdot \left(\det \left(a - \frac{b^2}{a} \right) A \right) = a^2 \left(a - \frac{b^2}{a} \right)^2 (\det A)^2 = (a^2 - b^2)^4$$

résultat qui reste vrai pour $a = 0$ par continuité.

Donc $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a^2 \neq b^2$. De plus la matrice $M_{a,b}$ est nulle (i.e de rang 0) si et seulement si $a = b = 0$, d'où la conclusion :

Q3 : Réponse D

---

4. Déjà fait. Attention, dans la réponse D., la condition « a non nul » est fausse ; seule compte la condition $a^2 \neq b^2$; de toutes façons, la « justification » donnée dans cette réponse est fantaisiste.

Q4 : Réponse A

---

5. $$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} a^2-\lambda & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)^2-\lambda & ab & ab & b^2 \\ (a+b)^2-\lambda & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ (a+b)^2-\lambda & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ (a+b)^2-\lambda & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix}$$

en faisant l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Donc

$$\chi_A(\lambda) = \left((a+b)^2 - \lambda\right) \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ 1 & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix} = \left((a+b)^2 - \lambda\right) \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 0 & b^2-a^2+\lambda & a^2-b^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix}$$

en faisant les opérations $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$.
C'est l'expression de la réponse D. Enfin, on sait que le polynôme caractéristique d'un espace vectoriel de dimension n est de degré n ; on peut donc éliminer la réponse B qui propose un polynôme de degré 3. Conclusion :

Q5 : Réponses A,D

---

6. A. est fausse : on sait seulement que les valeurs propres d'un endomorphismes *sont incluses* dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur quelconque.

B. Réponse exacte : il s'agit d'une partie du théorème spectral.

C. Réponse *presque* exacte : en effet, $f_{a,b}$ étant autoadjoint est diagonalisable (toujours le théorème spectral), donc admet 4 valeurs propres égales si et seulement si c'est une homothétie, i.e si sa matrice dans toute base est une matrice scalaire. Cela ne peut se produire que si $b=0$.

D. On a déjà vu que $f_{a,b}$ est un automorphisme si et seulement si $a^2 \neq b^2$.

Q6 : Réponse B

---

7. D'après le théorème spectral, $f_{a,b}$ est diagonalisable et possède une base orthonormale de vecteurs propres car il s'agit d'un endomorphisme symétrique réel.

Q7 : Réponse C

---

8. Si $b=0$, $\mathrm{M}_{a,b} = \mathrm{diag}(a^2,a^2,a^2,a^2)$ admet a^2 comme valeur propre d'ordre 4.

Si $a=0$, $\mathrm{M}_{0,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et il est alors facile de vérifier que b^2 est valeur propre, et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(e_1+e_4, e_2+e_3)$, et que $-b^2$ est aussi valeur propre, de sous-espace propre associé $\mathrm{Vect}(e_1-e_4, e_2-e_3)$; ce sont alors nécessairement des valeurs propres d'ordre 2 (sauf si $b^2=-b^2$, i.e $b=0$!) puisque l'endomorphisme est diagonalisable.

Si $a=b=0$, f est l'endomorphisme nul, de seule valeur propre 0.

Conclusion :

Q8 : Réponse C

---

9. On continue le calcul entamé à la question 5 :

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) &= \big((a+b)^2-\lambda\big)\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 0 & b^2-a^2+\lambda & a^2-b^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \big((a+b)^2-\lambda\big)(a^2-b^2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & ab & ab \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 \\ 0 & b^2-a^2+\lambda & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{(développement selon la dernière ligne)} \\
&= \big((a+b)^2-\lambda\big)(a^2-b^2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2ab & ab \\ 1 & a^2+b^2-\lambda & b^2 \\ 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix} \quad (\mathrm{C}_2 \longleftarrow \mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3) \\
&= \big((a+b)^2-\lambda\big)(a^2-b^2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 2ab \\ 1 & a^2+b^2-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{(développement selon la dernière ligne)} \\
&= \big((a+b)^2-\lambda\big)\big((a-b)^2-\lambda\big)(a^2-b^2-\lambda)^2
\end{aligned}$$

Lorsque $a^2=b^2$, i.e $a=\pm b$, ce polynôme admet 0 comme racine triple et $2a$ comme racine simple ($2a\neq 0$ compte tenu des hypothèses).

Si $a^2\neq b^2$, on vérifie (je ne détaille pas les calculs) que, compte tenu de l'hypothèse a,b non nuls, les trois réels $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et a^2-b^2 sont deux à deux distincts ; $\chi_{\mathrm{A}}(\lambda)$ admet donc alors une racine double et deux autres simples.

Conclusion :

Q9 : Réponses B,C

---

10. Dire que la base $\mathscr{B}$ est formée de vecteurs propres équivaut à dire que la matrice de $f_{a,b}$ dans cette base, i.e $\mathrm{M}_{a,b}$, est diagonale. Cela équivaut à $b=0$.

$$\boxed{\textbf{Q10 : Réponse C}}$$

---

11. On a vu que $f_{a,b}$ admet pour valeurs propres les trois réels $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et a^2-b^2. Plutôt que de résoudre des systèmes d'équation, autant essayer les vecteurs proposés par l'énoncé ! On calcule donc :

- $\mathrm{M}_{a,b}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=(a+b)^2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $(a+b)^2$; si on veut le rendre unitaire, il faut le multiplier par $\dfrac{1}{2}$.
- $\mathrm{M}_{a,b}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=(a-b)^2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $(a-b)^2$; si on veut le rendre unitaire, il faut le multiplier par $\dfrac{1}{2}$.
- $\mathrm{M}_{a,b}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=(a^2-b^2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre a^2-b^2 ; si on veut le rendre unitaire, il faut le multiplier par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\mathrm{M}_{a,b}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=(a^2-b^2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre a^2-b^2 ; si on veut le rendre unitaire, il faut le multiplier par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour toutes les valeurs de a et b, on a ainsi trouvé une base orthonormale de vecteurs propres.

$$\boxed{\textbf{Q11 : Réponse D}}$$

---

12. Je rappelle qu'une matrice *carrée* N est dite *orthogonale* si et seulement si ${}^t\mathrm{NN}=\mathrm{I}$.

Cela *implique* en particulier $\det({}^t\mathrm{NN})=1$ donc $(\det\mathrm{N})^2=1$ et $\det\mathrm{N}=\pm1$ (mais ce n'est pas une condition suffisante !).

$$\boxed{\textbf{Q12 : Réponses A,C}}$$

---

13. Je rappelle également qu'une matrice est orthogonale si et seulement si c'est la matrice de passage d'une b.o.n à une b.o.n, ou encore si et seulement si ses vecteurs colonnes/lignes forment une famille orthonormale.

La matrice P de l'énoncé a ses colonnes formées des coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs $\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2,\mathrm{V}_3,\mathrm{V}_4$ de 11.D ; c'est donc la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à une b.o.n de vecteurs propres de $f_{a,b}$. Il ne reste plus qu'à utiliser le cours sur les changements de base...

$$\boxed{\textbf{Q13 : Réponses B,D}}$$

---

14. Les deux premières colonnes de la matrice Q correspondent aux vecteurs V_1 et V_3 ; les deux dernières colonnes doivent donc correspondre à des vecteurs propres associés à la troisième valeur propre a^2-b^2 ; on peut donc choisir des vecteurs colinéaires à $\mathrm{V}_2+\mathrm{V}_4$ et $\mathrm{V}_2-\mathrm{V}_4$, i.e colinéaires à $(-1,1,-1,1)$ et $(1,1,-1,-1)$. Il faut en plus que les vecteurs colonnes soient unitaires. La seule possibilité est :

Q14 : Réponse C

---

15. On doit avoir $X = f_{a,b}^{-1}(W)$ (cela est possible car $a^2 \neq b^2$ donc $f_{a,b}$ est inversible).

- *1ère solution :* En notant abusivement de la même façon le vecteur et la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$, cela s'écrit : $X = M_{a,b}^{-1}W$. En notant $D_{a,b} = \mathrm{diag}((a+b)^2, a^2-b^2, (a-b)^2, a^2-b^2)$, on a vu que ${}^tPM_{a,b}P = D_{a,b}$ d'où, puisque $P^{-1} = {}^tP$: $M_{a,b} = PD_{a,b}{}^tP$ et enfin, les coordonnées cherchées sont données par : $X = PD_{a,b}^{-1}\,{}^tPW$.

  Cela donne quand même des calculs bien horribles...
- *2ème solution :* On remarque que l'on a $D_{a,b}\cdot D_{-a,b} = (a^2-b^2)^2 I_4$! Donc $M_{a,b}\cdot M_{-a,b} = (a^2-b^2)^2 I_4$ et $M_{a,b}^{-1} = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}M_{-a,b}$!

  Donc $X = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}M_{-a,b}W$, c'est-à-dire :

  $$x = \frac{1}{(a^2-b^2)^2}(a^2w_1 - abw_2 - abw_3 + b^2w_4), \quad y = \frac{1}{(a^2-b^2)^2}(-abw_1 + a^2w_2 + b^2w_3 - abw_4) \quad \text{etc...}$$

  les numérateurs sont ceux de la réponse B, mais le dénominateur est $(a^2-b^2)^2$ et non $(a^2-b^2)^4$ ...

Q15 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

16. Il suffit ici d'appliquer les résultats du cours sur les systèmes différentiels : si A est une matrice diagonalisable, et si (V_i) est une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i, les fonctions $t \mapsto e^{\lambda_i t}V_i$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions du système différentiel $X' = AX$.

Ici, suivant la base de vecteurs propres que l'on choisit (cf. questions 11 et 14), on obtient l'une des deux expressions des réponses C et D.

Q16 : Réponses C,D

---

17. Il est facile de vérifier que $\mathscr{M}$ n'est pas stable par addition : la matrice $M_{0,1} + M_{1,0}$ ne peut appartenir à $\mathscr{M}$! En conséquence, ce ne peut être ni un sous-espace vectoriel , ni un sous-anneau de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$.

On a $M_{a,b}M_{a',b'} = PD_{a,b}{}^tPPD_{a',b'}{}^tP = PD_{a,b}D_{a',b'}{}^tP$. Puisque $(a+b)(a'+b') = A+B$ et $(a-b)(a'-b') = B-A$, on aura $D_{a,b}D_{a',b'} = D_{B,A}$ donc aussi $M_{a,b}M_{a',b'} = M_{B,A}$! (*et NON* $M_{A,B}$ ...).

Quant à la réponse C, on peut considérer qu'elle est fausse car, même si la phrase « $\mathscr{M}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ » est exacte, la justification donnée « n'est pas stable par multiplication » est inexacte, comme le montre le calcul ci-dessus.

Q17 : Réponse D

18.
- La division euclidienne de $P_{a,b}^n$ par X^2-1 s'écrit : $P_{a,b}^n = (X^2-1)Q + \alpha X + \beta$. Pour déterminer α et β, il suffit de faire $X = 1$ et $X = -1$, ce qui donne le système

  $$\begin{cases} (a+b)^n = \alpha + \beta \\ (a-b)^n = -\alpha + \beta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}[(a+b)^n - (a-b)^n] \\ \beta = \dfrac{1}{2}[(a-b)^n + (a+b)^n] \end{cases}$$

  Attention : La valeur α dans l'énoncé est l'opposé de celle ci-dessus...
- La matrice $D_{a,b}$ de l'énoncé n'est plus la même qu'avant...Il s'agit ici, compte tenu de l'ordre dans lequel sont placées les valeurs propres, de la matrice de $f_{a,b}$ dans la base trouvée à la question 14., i.e $M_{a,b} = QD_{a,b}{}^tQ = QM_{a,b}Q$ puisque Q est symétrique. On aura alors, puisque $Q = {}^tQ = Q^{-1}$, pour tout entier n, $M_{a,b}^n = QD_{a,b}^nQ$.

  On a alors directement
  $D_{a,b}^n = \mathrm{diag}((a+b)^{2n}, (a-b)^{2n}, (a-b)^n(a+b)^n, (a-b)^n(a+b)^n) = \mathrm{diag}((A-B)^2, (A+B)^2, A^2-B^2, A^2-B^2)$ si on pose, comme l'énoncé, $A = \dfrac{(a-b)^n + (a+b)^n}{2}$ et $B = \dfrac{(a-b)^n - (a+b)^n}{2}$. On a donc $M_{a,b}^n = M_{A,-B}$ *et NON* $M_{A,B}$ ...(d'ailleurs, il suffit de considérer le cas $n = 1$ pour s'en convaincre).

Q18 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

19. On suppose ici $f_{a,b}$ non bijectif, i.e $a^2 = b^2$.

Si $a = b$: $\mathrm{M}_{a,a} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ et si $b = -a$: $\mathrm{M}_{a,-a} = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 & -a^2 \\ a^2 & -a^2 & -a^2 & a^2 \end{pmatrix}$

Dans le premier cas, le rang est égal à 0 si $a = 0$ et 1 sinon ; dans le second cas, le rang est égal à 0 si $a = 0$ et à 1 sinon ; mais dans ce dernier cas, les colonnes ne sont pas égales et on peut donc considérer que la réponse C est fausse.

Q19 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

20. D'après l'énoncé, on se place toujours ici dans le cas $a^2 = b^2$. On a vu que $\mathrm{M}_{a,b}\mathrm{M}_{a',b'} = \mathrm{M}_{aa'+bb',a'b+ab'}$.

Donc $\mathrm{M}_{a,b}\mathrm{M}_{a',b'} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} aa' + bb' = 0 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}$

Dans le cas $a = b$, le système équivaut à $a(a' + b') = b(a' + b') = 0$, donc conduit à $a' + b' = 0$ si a ou b n'est pas nul, i.e si $f_{a,b}$ est différent de l'endomorphisme nul.

Le cas $a = -b$ se traite pareillement donc :

Q20 : Réponse B

PARTIE II

21. Il suffit de connaître ses formules de trigonométrie : « $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$ »...

Q21 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

22. $u_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \big(\cos(\lambda+n)x + \cos(\lambda-n)x\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(\lambda+n)x}{\lambda+n} + \frac{\sin(\lambda-n)x}{\lambda-n}\Big]_0^{\pi}$ puisque $\lambda + n$ et $\lambda - n$ ne s'annulent pas.

Donc $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\lambda+n)\pi}{\lambda+n} + \frac{\sin(\lambda-n)\pi}{\lambda-n}\right) = \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda+n} + \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda-n}\right) = (-1)^n\frac{\lambda\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - n^2}$.

Q22 : Réponses B,D

---

23. A. L'équivalent donné par l'énoncé est exact d'après le calcul précédent, mais le critère sur les équivalents ne permet pas de conclure, la série n'étant pas de signe constant !

B. C. On peut effectivement dire que $|u_n|$ est équivalent à $\frac{|\lambda\sin(\lambda\pi)|}{n^2}$ puisque $\lambda\sin(\lambda\pi)$ n'est pas nul compte tenu des hypothèses. Cela permet de conclure que la série est absolument convergente, par comparaison à une série de Riemann.

Q23 : Réponse C

---

24. A. Soit $\mathrm{I} = [a,b]$ un intervalle fermé inclus dans $]k, k+1[$. On a alors pour tout $\lambda \in \mathrm{I}$,

$|v_n(\lambda)| \leqslant \frac{|\lambda|}{\min(|a^2 - n^2|, |b^2 - n^2|)} \leqslant \frac{k+1}{\min(|a^2 - n^2|, |b^2 - n^2|)}$.

Donc, pour n assez grand (plus grand que b), on aura $\|v_n\|_{\infty}^{\mathrm{I}} \leqslant \frac{k+1}{n^2 - b^2}$, qui est le terme général d'une série convergente, i.e que la série $\sum v_n(\lambda)$ est normalement convergente sur I.

B. C'est évidemment le contraire : toute série normalement convergente est uniformément et absolument convergente...

C. Elle n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$: en effet, pour $\lambda_n = n+\dfrac{1}{2}$, $|v_n(\lambda_n)| = \dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{4}}$ donc

- soit les v_n ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et il ne peut de toutes façons pas y avoir convergence normale (en fait, elles sont bornées, mais je n'ai pas le courage d'écrire la démonstration...)
- soit elles le sont, et alors $\|v_n\|_\infty \geqslant |v_n(\lambda_n)| \geqslant 1$, donc la série $\sum \|v_n\|_\infty$ diverge.

D. On a démontré le contraire en A...

Q24 : Réponse A

---

25. Il s'agit ici de la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \text{ pour tout } x \text{ réel tel que } e^{ix} \neq 1 \text{i.e } x \notin 2\pi\mathbb{Z}$$

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$ (ne pas oublier le premier terme...)

Enfin, si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ix} = 1$ donc :

Q25 : Réponse C

---

26. A. B. Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) = \mathscr{R}e\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \mathscr{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) - 1 = \mathscr{R}e\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) - 1 = \mathscr{R}e\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\,\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\right) - 1$$

$$C_n(x) = \mathscr{R}e\left(e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right) - 1 = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} - 1 = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - 1$$

ce qui est la réponse A.

On peut ensuite simplifier, ce qui sera utile pour la suite : $C_n(x) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}$.

C. D C_n, comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ($\sum \cos(kx)$), est continue sur $\mathbb{R}$. L'énoncé de la question C n'est pas très clair ; peut-être l'énoncé veut-il dire que l'expression trouvée ci-dessus est prolongeable lorsque x tend vers $2k\pi$, ce qui est forcément le cas puisque, justement, C_n est continue !

Q26 : Réponses A,C

---

27. On a $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\frac{-\lambda^2x^2}{2}}{\frac{x}{2}} \sim -\lambda^2 x$, donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$, et f est continue en 0 si et seulement si $\ell = 0$, mais l'équivalent donné dans l'énoncé A est faux !.

Pour $x \in]0,\pi]$, $f'(x) = \dfrac{-\lambda\sin(\lambda x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}(\cos(\lambda x)-1)\cos\frac{x}{2}}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{-\lambda^2x^2}{4}}{\frac{x^2}{4}} = -\lambda^2$.

Ainsi, lorsque $\ell = 0$, f est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\lambda^2$ existe ; le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ permet alors d'affirmer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Q27 : Réponse D

---

28. A. est visiblement faux puisque f n'est définie que sur $[0,\pi]$!

B. *Énoncé très ambigu !* La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$ est définie et continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en 0^+, puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2n+1)x/2}{x/2} = 2n+1$, ce qui, une fois prolongée, en fait bien une fonction continue sur I…

C. L'énoncé est ici plus précis, et correct.

D. Ici, tout s'éclaire ! Il semble, à la lecture de cette question, qu'il faille considérer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$ n'est pas définie en 0, donc répondre Faux à la question B. Cependant, cette fonction se prolonge en une fonction continue sur I ; elle y sera donc intégrable.

Q28 : Réponse C

---

29. En utilisant les résultats des calculs précédents :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \int_0^{\pi} \cos(\lambda x)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right) dx = \int_0^{\pi} \cos(\lambda x)\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\lambda x\, dx + \int_0^{\pi} \frac{\cos(\lambda x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(\lambda x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx$$

ce qui est la réponse B.

En écrivant $\cos(\lambda x) = [\cos(\lambda x) - 1] + 1$, on obtient

$$S_n = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\, dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx$$

ce qui ne correspond ni à la réponse C, ni à la réponse D…

Q29 : Réponse B

---

30. On a vu que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, donc on peut faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\, dx &= \left[\frac{-2f(x)}{2n+1}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]_0^{\pi} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\, dx \\ &= \frac{f(0}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\, dx \end{aligned}$$

donc, puisque f' est bornée sur $[0,\pi]$ car continue :

$$|I_n| \leqslant \frac{\left|f(0\right|}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} \left|f'(x)\right| \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| dx \leqslant \frac{\left|f(0\right|}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} \left|f'(x)\right| dx \leqslant \frac{\left|f(0\right|}{2n+1} + \frac{2\pi\left\|f'\right\|_\infty}{2n+1}$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$; cependant, le théorème de convergence dominée ne s'applique pas ici, puisque, pour $x \in]0,\pi[$, la suite $n \mapsto f'(x)\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ n'admet pas de limite quand $n \to +\infty$. Conclusion :

Q30 : Réponse C

---

31. A. B

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x - \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos(n+1)x}{\sin\frac{x}{2}} dx = 2\int_0^{\pi} \cos(n+1)x\, dx = 0$$

donc la suite (J_n) est constante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $J_n = J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} = \pi$…

Rem : ici encore, on en vient à se demander si l'oubli du $\dfrac{1}{2}$ *devant l'expression de* J_n *est volontaire ou pas…*

C. D À la question 29, on avait trouvé

$$S_n = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx + \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{I_n}{2} + \frac{J_n}{2}$$

et d'après la question 22

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\lambda\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2}$$

En combinant ces deux résultats, et en faisant tendre $n\to\infty$, compte tenu des résultats des questions 30 et 31 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\lambda\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2} = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{\pi}{2}$$

d'où, après division par $\sin(\lambda\pi)\neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2\lambda}{\lambda^2-k^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda}$$

Q31 : Réponse C

---

32. A. Il existe bien sûr des fonctions continues positives sur $\mathbb{R}_+$ qui ne sont pas intégrables...

B. g est continue positive sur $[0,+\infty[$ et $g(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{\alpha}}$; puisque $t\mapsto\frac{1}{t^{\alpha}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (et NON sur $]0,+\infty[$!), g est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+$.

C. Il existe bien sûr des fonctions continues positives sur $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en $+\infty$, et qui ne sont pas intégrables ; par exemple $t\mapsto\frac{1}{t+1}$ ...

D. g étant positive, les notions de convergence ou d'absolue convergence sont ici identiques, et on vient de voir qu'elle a lieu pour $\alpha>1$ ...

Q32 : Réponse E (aucune bonne réponse)

---

33. Pour $\beta>0$, l'application $x\mapsto x^{-\beta}$ est bien un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$, et le changement de variable $t=x^{-\beta}$ donne

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^{\alpha}} = \int_1^0\frac{-\beta x^{-\beta-1}\,dx}{1+x^{-\alpha\beta}} = \beta\int_0^1\frac{x^{-\beta-1}\,dx}{1+x^{-\alpha\beta}}$$

ce qui est la réponse B.

En prenant $\beta=\frac{1}{\alpha-1}$, qui est bien strictement positif pour $\alpha>1$, on a

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{x^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}}{1+x^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+1}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

d'où $H(\alpha)=\int_0^{+\infty} g = \int_0^1 g + \int_1^{+\infty} g = G(\alpha)+\frac{1}{\alpha-1}G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$, ce qui est l'expression qui figure dans la réponse C, mais cette expression est en fait valable pour tout $\alpha>1$. Elle est donc *a fortiori* valable pour $\alpha\geqslant 2$ (*là, ça devient assez vicieux...*). Donc :

Q33 : Réponses B,C

---

34. Pour tout $t\in[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^{n}(-t)^{k\alpha} = \frac{1-(-t)^{(n+1)\alpha}}{1+t^{\alpha}} = g(t)-(-1)^{n+1}t^{(n+1)\alpha}g(t)$$

en vertu de la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\neq 1$. Donc

Q34 : Réponse A

---

35. La majoration est immédiate :

$$0 \leqslant \mathrm{K}_n = \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\gamma}}{1+t^\gamma}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{(n+1)\gamma}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\gamma+1}$$

Q35 : Réponse D

---

35 bis ! On a facilement, puisque $\gamma > 0$: si $t \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^{(n+1)\gamma} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(t) = 0$ et, pour $t = 1$, $k_n(1) = \dfrac{1}{2}$ pour tout n. Donc :

Q35bis : Réponses B,C

---

36. A. B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, k_n est continue sur $[0,1]$, il n'y a donc pas de problème d'intégrabilité !

C. D. Puisque $t \leqslant 1$, on a $0 \leqslant k_n(t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^\gamma}$, qui est continue donc intégrable sur $[0,1]$.

La majoration donnée dans la réponse D est exacte, mais la fonction $t \mapsto t^{(n+1)\gamma}$ n'es pas intégrable sur $[0,+\infty[$ et, de toutes façons, que vient faire l'intervalle $[0,+\infty[$ ici ?

Q36 : Réponse C

---

37. Il est vrai que le théorème de convergence dominée s'applique, mais pas avec la fonction donnée dans la réponse A, qui dépend de n !

Les réponses B,C,D sont exactement les mêmes que celles de la question 35 !

Q37 : Réponse D

---

38. On reprend tous les calculs précédents :

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(\alpha) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} t^{(n+1)\alpha} g(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{(n+1)\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k\alpha} + (-1)^{n+1}\int_0^1 k_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

en prenant $\gamma = \alpha$ dans la définition de k_n. Compte tenu des résultats précédents, on obtient, par passage à la limite quand $n \to \infty$:

$$\mathrm{G}(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$$

Si $\alpha > 1$, on a aussi $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} > 1$, donc on peut appliquer le résultat précédent :

$$\mathrm{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (\alpha-1)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha-1+k\alpha}$$

En conclusion de tous ces calculs :

Q38 : Réponses A,D

---

39. Le calcul fait à la question 33 pour $\alpha > 1$ donne : $H(\alpha) = G(\alpha) + \dfrac{1}{\alpha-1} G\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)$ d'où, en reprenant les formules établies dans la question précédente :

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha(k+1)-1} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha-1}$$

Q39 : Réponse B

---

40. A. B On a évidemment $|a_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{k^2\alpha^2}$ donc la série de terme général a_k est absolument convergente par comparaison à une série de Riemann. Cependant, l'équivalent donné dans la réponse B est faux...

C. D La formule trouvée à la question précédente donne :

$$H(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha-1} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{-2}{k^2\alpha^2-1} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Or, à la question 31, on a obtenu, pour tout $\lambda \notin \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2\lambda}{\lambda^2-k^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda}$$

On peut appliquer cette formule avec $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$, qui n'est pas entier puisque $\alpha > 1$, et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2}{1-k^2\alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} - 1$$

ce qui conduit à $H(\alpha) = \dfrac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$.

Q41 : Réponse C

Rem : À force de lire des réponses dans l'énoncé qui sont « presque » vraies, à un signe près, on finit par douter de ses calculs ! On peut donc vérifier la dernière formule que l'on vient de trouver, par exemple pour $\alpha = 2$; et, dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond bien au résultat ci-dessus. Ouf !

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆

⋆