ICNA 2011

Question	a)	b)	c)	d)	e)
1		●			
2	●		●		
3					●
4	●			●	
5				●	
6			●	●	
7			●	●	
8					●
9		●			
10	●			●	
11					●
12			●		
13		●	●		
14		●		●	
15	●				
16		●	●		
17	●				
18			●		
19	$\star$				
20			●		

Question	a)	b)	c)	d)	e)
21		●	●		
22	●				
23					●
24		●	●		
25		$\star$		●	
26					●
27		●			
28	●			●	
29			●		
30					●
31		●	●		
32				●	
33		●			
34		●		●	
35	●		●		
36			●	●	
37	●				
38			●		
39		●		●	
40			●		

$\star$: ambigu.

Partie I

Question 1 : a) et c) sont faux car $I_2 \in \mathcal{S}_2$ mais $2I_2 = I_2 + I_2 \notin \mathcal{S}_2$. b) preuve classique.

Question 2 : $A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I_2$.

Question 3 : Rédaction hideuse ! On a par récurrence $A^n = a_n A + b_n I_2$ où $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6}\, a_n + b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}\, a_n \end{cases}$ $(\star)$ ce qui discrédite les trois premières. (A, I_2) libre donc il y a unicité.

Question 4 : En sommant membre-à-membre dans $(\star)$, $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$; puis on reporte la relation $b_n = 1 - a_n$ dans $(\star)$.

Question 5 : D'après 4.d), $(a_n - \frac{6}{7})$ est géométrique de raison $-\frac{1}{6}$, ce qui donne $a_n - \frac{6}{7} = (-\frac{1}{6})^{n-1}(a_1 - \frac{6}{7})$ avec $a_1 = 1$. Enfin, $b_n = 1 - a_n$.

Question 6 : $A^n = a_n A + b_n I_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} A^\infty = \frac{6}{7}A + \frac{1}{7}I_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^*$.

Question 7 : a) B n'est pas triangulaire supérieure. b) La condition donnée, quoique suffisante et vérifiée ici, n'est pas nécessaire. d) χ_B convient.

Question 8 : $\lambda_1 = \frac{5}{21}$ et $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}(7,-9,7)$; $\lambda_2 = \frac{4}{9}$ et $E_{\lambda_2} = \mathbb{R}(0,0,1)$; $\lambda_3 = 1$ et $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}(1,1,1)$.

Question 9 : Plusieurs matrices P font que $B = PDP^{-1}$ mais une seule à l'inverse donnée, $P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 10 : $B^n = PD^nP^{-1}$ d'où la réponse a) après calculs, et la limite dans $\mathcal{S}_3$ mais pas $\mathcal{S}_3^*$.

Question 11 : C est triangulaire supérieure et non diagonalisable. Le polynôme fourni n'annule pas C.

Question 12 : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J^3 = J^2$ d'où $\forall n \geqslant 2$, $J^n = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui est faux pour $n = 1$. La formule du binôme donne c).

Question 15 : A^n appartient à S_r par produit mais pas à $\mathcal{S}_r^*$ (par exemple avec $A = I_r$).

Question 16 : On passe à la limite dans les relations

$$0 \leqslant a_{ij}^{(n)} \leqslant 1 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(n)} = 1 \quad \text{et} \quad a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}^{(n)} a_{kj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} a_{kj}^{(n)} .$$

Question 17 : M est inversible (lemme d'Hadamard) mais pas forcément diagonalisable : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 18 : $C_1 = \big(c_{ij}\big) \in \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ (donc a) est faux), et est à diagonale strictement dominante, car

$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_{r-1} \\ j \neq i}} |c_{ij}| = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_{r-1} \\ j \neq i}} a_{ij} \underset{\text{car } a_{ir} > 0}{<} a_{ir} + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_{r-1} \\ j \neq i}} a_{ij} \underset{\text{car } A \in \mathcal{S}_r^*}{=} 1 - a_{ii} = -c_{ii} \underset{a_{ii} \in [0,1]}{=} |c_{ii}| .$$

On en déduit que C_1 est inversible, donc $\mathrm{rg}(B) \geqslant r-1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(A - I_r) \leqslant 1$ d'où l'égalité.

Question 19 : $A - \lambda I_r$ n'est pas inversible, donc n'est pas à diagonale strictement dominante, donc **il existe** $i \in \mathbb{N}_r$ tel que ... donc d) est fausse et a) est floue.

Question 20 : On a $\det(A) \leqslant |\det(A)| = |\lambda_1| \cdots |\lambda_r| \leqslant 1$. On parle bien de valeurs propres complexes.
Question 21 : La preuve se fait comme il est dit, en développant $\det(M)$ par rapport à la première ligne.

Partie II

Question 22 : b) $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. c) et d) contredits par $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$.

Question 23 : $G, H \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $G'(x) = \displaystyle\int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$; $H'(x) = 2h(x) \displaystyle\int_0^x h$.

Question 24 : On obtient b) avec le changement de variable du a).

Question 25 : $0 \leqslant \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant e^{-x^2}$ donc $\boxed{0 \leqslant} G(x) \leqslant e^{-x^2}$. La raison donnée est légèrement insuffisante.
On en déduit la valeur de l'intégrale de Gauss $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Question 26 : a) faux pour $t = 0$ et f telle que $f(0) \neq 0$. b) argument faux car $t \mapsto 1$ est continue et de module borné sur $\mathbb{R}$ mais pas intégrable. c) le produit de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ ne l'est pas en général. d) $|l(x,t)| = |f(t)|$ donc $t \mapsto l(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Question 27 : b) c'est le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre. $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ |F(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f|\,.$

Question 28 : a) par IPP on a, pour $x \neq 0$,

$$F(x) \;=\; \left[\frac{1}{1+t^2}\,\frac{e^{-2i\pi\,xt}}{-2i\pi x}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,\frac{e^{-2i\pi\,xt}}{-2i\pi x}\,dt \;=\; \frac{-1}{i\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,e^{-2i\pi\,xt}\,dt$$

d'où le résultat pour $x \neq 0$ car $1/i = -i$, et pour $x = 0$ les deux membres de l'énoncé sont nuls. c) on en déduit que $|\pi x F(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{(1+t^2)^2}\,dt = 1$ d'où l'inégalité du c) mais seulement pour $x \neq 0$.

Question 29 : c) théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Question 30 : Posons $K(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$. La fonction F_1 est C^1 sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\big[tf^2(t)e^{-2i\pi xt}\big]\right| \leqslant \dfrac{2\pi}{1+t^2}$ et du théorème de Leibniz, et $F_1' = -2i\pi(F-K)$ avec également $\pi x F = iF_1$ d'où on tire $-2i\pi(F-K) = -i\pi(F + xF')$ d'où le résultat du c) sur $\mathbb{R}^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$ car F n'est pas dérivable en 0, vu l'expression obtenue à la question 32. L'expression du c) exclut celle du d) car $F \neq 0$.

Question 31 : On a $F - xF' = 2K$ donc $-xF'' = 2K' = 2(-2i\pi)F_1 = -4\pi^2 xF$ donc $F'' = 4\pi^2 F$ sur $\mathbb{R}^*$.

Question 32 : F doit vérifier $F(x) = Ae^{-2\pi x} + Be^{2\pi x}$ pour $x > 0$ et $F(x) = Ce^{-2\pi x} + De^{2\pi x}$ pour $x < 0$. De plus F est continue en 0, de valeur $F(0) = \pi$ et F est de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$, ce qui ne laisse qu'une possibilité,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \boxed{F(x) = \pi e^{-2\pi|x|}} \quad ; \quad F_1(x) = -i\pi^2 x e^{-2\pi|x|} \quad \text{et} \quad K(x) = \left[\frac{\pi}{2} + \pi^2|x|\right] e^{-2\pi|x|}\,.$$

Partie III

Question 33 : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}) + \circ(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{2n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})$. Le c) est bon sauf « positifs » qu'on doit remplacer par « négatifs ».

Question 34 : $g_x(t) = (\ln t)e^{-x\ln t}$ et on dérive un produit.

Question 35 : $g_1 = t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc sur $[n-1, n+1]$ pour $n \geqslant 4$, d'où le a) par comparaison avec une intégrale. Pour le c), g_1 décroît sur $[n, n+1]$ pour $n \geqslant 3$.

Question 36 : c) Pour $n \geqslant 3$ on a $r_{n+1} \leqslant \dfrac{\ln^2(n+1) - \ln^2 n}{2} \leqslant r_n$ donc la suite (r_n) décroît à partir de $n = 3$.

Question 37 : $v_n'(x) = g_x(n+1) - g_x(n)$, ce qui est négatif lorsque $n \geqslant e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{\ln n}$ donc partout sur J lorsque $n \geqslant 3$.

Question 39 : $w_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{(n+1)^{1-x} - n^{1-x}}{1-x} & \text{si } x > 1\,, \\ \dfrac{1}{n} - \big[\ln(n+1) - \ln n\big] & \text{si } x = 1\,, \end{cases}$ donc w_n est continue aussi en $x = 1$ d'après l'argument donné en b). Pour d), on intègre l'encadrement $\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$ sur $[n, n+1]$.

Question 40 : D'après ce qui précède, $\forall\, x \geqslant 1\,,\ \forall\, n \geqslant 3\,,\ 0 \leqslant w_n(x) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}\,.$