CONCOURS COMMUN 2000

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

ANALYSE

Partie I : Etude de la réciproque de la fonction tanh.

1.- On sait que tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$(\tanh)'(x) = \left(\frac{\sinh}{\cosh}\right)'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0.$$

Donc, tanh est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par suite, tanh établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\tanh(\mathbb{R})$. Or,

$$\tanh(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty}\tanh(x), \lim_{x\to+\infty}\tanh(x)\right[=]-1,1[= I.$$

Donc

$$\boxed{\text{tanh établit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I =]-1,1[.}$$

2.- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh'(x) = 1 - \tanh^2 x.}$$

3.- Tout d'abord, si $x \in]-1,1[$, alors $-x \in]-1,1[$. Soit donc $x \in]-1,1[$ puis $y = \text{Artanh}(x)$ (ce qui équivaut à $x = \tanh(y)$). Puisque tanh est impaire, on a :

$$\text{Artanh}(-x) = \text{Artanh}(-\tanh y) = \text{Artanh}(\tanh(-y)) = -y = -\text{Artanh} x.$$

On a montré que :

$$\boxed{\text{Artanh est impaire.}}$$

4.- Puisque tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on sait que sa réciproque Artanh (définie sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$) est dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour $x \in]-1,1[$:

$$\text{Artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\text{Artanh}(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\text{Artanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Donc,

$$\boxed{\text{Artanh est dérivable sur }]-1,1[\text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ \text{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.}$$

5.- **1ère solution.** (la solution probablement attendue par l'énoncé au vu de l'ordonnancement des questions).
Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\mathrm{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right) = \left(\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))\right)'$$
$$= \left(\frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x})\right)'.$$

Par suite, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C.$$

Pour $x = 0$, on obtient $\mathrm{Artanh}(0) = 0 + C$ et on a montré que :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).}$$

2ème solution. Soit $x \in]-1,1[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$y = \mathrm{Artanh}(x) \Leftrightarrow x = \tanh(y) \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

6.- Quand x tend vers 0, on a :

$$\mathrm{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4),$$

et par intégration, on obtient en tenant compte de $\mathrm{Artanh}(0) = 0$:

$$\boxed{\mathrm{Artanh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).}$$

<u>Partie II</u> : Etude d'une équation différentielle

7.- Les fonctions $x \mapsto \frac{3}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x(1-x^2)}$ sont continues sur $]0,1[$. Donc les solutions de (E) sur $]0,1[$ sont de la forme $f_0 + Cf_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) sur $]0,1[$, f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H) (équation homogène associée) sur $]0,1[$ et C est une constante réelle.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,1[&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ xf'(x) + 3f(x) = \frac{1}{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ x^3f'(x) + 3x^2f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ (x^3f)'(x) = \frac{x^2-1+1}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,1[,\ x^3f(x) = -x + \mathrm{Artanh}(x) + C\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{\mathrm{Artanh}(x) - x + C}{x^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur }]0,1[\text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \frac{\mathrm{Artanh}(x)-x+C}{x^3},\ C \in \mathbb{R}.}$$

Partie III : Etude d'une équation fonctionnelle

8.- Soit $C \in \mathbb{R}$ et f la fonction qui à tout réel x associe C.

$$f \text{ solution} \Leftrightarrow C = \frac{2C}{1+C^2} \Leftrightarrow C = 0 \text{ ou } \frac{2}{1+C^2} = 1 \Leftrightarrow C = 0 \text{ ou } C^2 = 1 \Leftrightarrow C \in \{-1, 0, 1\}.$$

$$\boxed{\text{Les constantes solutions sont } -1,\ 0 \text{ et } 1.}$$

9.- Si f est solution, pour $x = 0$, on obtient $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+(f(0))^2}$, et, le calcul étant le même que ci-dessus,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est solution } f(0) \in \{-1, 0, 1\}.}$$

10.- Soient f une solution et x un réel. On a :

$$f(x) = f\left(2.\frac{x}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f(\frac{x}{2})\right)^2}.$$

Par suite,

$$1 - f(x) = 1 - \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)^2}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \geq 0,$$

et

$$f(x) + 1 = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} + 1 = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)^2}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \geq 0.$$

Donc, $f(x) \geq -1$ et $f(x) \leq 1$. On a montré que :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est une solution, } \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1.}$$

11.- Soit f une fonction solution. D'une part, $-f$ est dérivable en 0. D'autre part, pour x réel donné,

$$(-f)(2x) = -\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2(-f)(x)}{1+((-f)f(x))^2}.$$

Finalement,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est solution, } -f \text{ est encore solution.}}$$

12.- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x} = \frac{2\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1+\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2} = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2} = \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2(e^{2x} + e^{-2x})} = \tanh(2x).$$

tanh étant d'autre part dérivable en 0, on a montré que

$$\boxed{\tanh \text{ est solution.}}$$

13.- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$ et, puisque f est dérivable en 0 et donc continue en 0,

$$\lim_{n\to+\infty} f(\frac{x_0}{2^n}) = \lim_{X\to 0} f(X) = f(0) = 1.$$

Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et a pour limite } 1.}$$

14.- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = f(\frac{x_0}{2^n}) = f(2\frac{x_0}{2^{n+1}}) = \frac{2f(\frac{x_0}{2^{n+1}})}{1+(f(\frac{x_0}{2^{n+1}}))^2} = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}.}$$

Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $\dfrac{2}{1+u_{n+1}^2} > 0$ et donc,

$$u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > 0, \quad u_n = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < 0.$$

Par une récurrence immédiate, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{sgn}(u_n) = \mathrm{sgn}(u_0) = \begin{cases} -1 & \text{si } u_0 < 0 \\ 0 & \text{si } u_0 = 0 \\ 1 & \text{si } u_0 > 0 \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Si } u_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0,\ \text{si } u_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0 \text{ et si } u_0 < 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = u_{n+1}\frac{u_{n+1}^2+1-2}{1+u_{n+1}^2} = u_{n+1}\frac{u_{n+1}^2-1}{1+u_{n+1}^2}.$$

Puisque, d'après 10.-, $\dfrac{u_{n+1}^2-1}{1+u_{n+1}^2} \leq 0$, $u_{n+1} - u_n$ est du signe contraire au signe de u_{n+1}. D'où les résultats :

- si $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
- si $u_0 < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est croissante.

15.- • Si $u_0 < 0$, d'après 14.-, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative et ne peut donc pas tendre vers 1 ce qui contredit le résultat établi en 13.-

• Si $u_0 = 0$, d'après 14.-, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et ne peut donc pas tendre vers 1 ce qui contredit le résultat établi en 13.-

• Si $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par suite, pour tout naturel n, $u_n \leq u_0 = f(x_0)$. Or, $f(x_0) \leq 1$ d'après 10.-, et $f(x_0) \neq f(0) = 1$ par hypothèse. Donc, pour tout naturel n, $u_n \leq u_0 < 1$ et en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq u_0 < 1$, ce qui contredit le résultat de 13.-

Finalement, sous l'hypothèse $f(0) = 1$, il était absurde de supposer l'existence d'un x_0 tel que $f(x_0) \neq f(0)$. Donc

$$\boxed{\text{si } f(0) = 0, \text{ la fonction } f \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

16.- Si $f(0) = -1$, $-f$ est une solution (d'après 11.-) telle que $(-f)(0) = 1$. D'après la question précédente, $-f$ est constante sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de f.

17.- En résumé, si f est une solution, $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$. Mais, si $f(0) \in \{-1, 1\}$, f est constante sur $\mathbb{R}$. Donc, si f est une solution non constante sur $\mathbb{R}$ (il en existe d'après 12.-), nécessairement $f(0) = 0$.

18.- Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x_0) = 1$. On considère de nouveau la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en 13.-. On a déjà $u_0 = 1$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = 1 \Rightarrow \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = 1 \Rightarrow u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + 1 = 0 \Rightarrow (u_{n+1}-1)^2 = 0 \Rightarrow u_{n+1} = 1.$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(0) \neq 1$. Il est donc absurde de supposer l'existence d'un x_0 tel que $f(x_0) = 1$ et on a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1.$$

De même, s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$, alors, $-f$ est une solution telle que $(-f)(0) = 0$ et $(-f)(x_0) = 1$ ce qui est impossible. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1.$$

En résumé, pour x réel donné, $-1 \leq f(x) \leq 1$ et $f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$. Donc :

$$\boxed{\text{Si } f(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1.}$$

19.- Puisque, pour tout réel x, $f(x) \in]-1,1[$, g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque, tanh est solution (d'après 12.-),

$$\tanh(g(2x)) = f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2\tanh(g(x))}{1+(\tanh(g(x)))^2} = \tanh(2g(x)).$$

En reprenant l'argument tangente hyperbolique des deux membres, on a montré que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x).}$$

20.- f est dérivable en 0 par hypothèse et Artanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ (d'après 4.-) et donc en $f(0)$. On en déduit que $g = \text{Artanh} \circ f$ est dérivable en 0.

$$\boxed{g \text{ est dérivable en } 0.}$$

21.- On a déjà $g(0) = \text{Artanh}(f(0)) = \text{Artanh}(0) = 0$. Puisque g est dérivable en 0, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(\frac{x}{2^n}) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} = \lim_{X\to 0} \frac{g(X)-g(0)}{X-0} = g'(0).$$

22.- Posons $g'(0) = a$. D'après 21.-, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$.

Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0$.

C'est clair pour $n = 0$.

Soit $n \geq 0$. Supposons que $v_n = v_0$. D'après 19.-, on a alors :

$$v_{n+1} = \frac{g(\frac{x}{2^{n+1}})}{\frac{x}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{1}{2}g(2.\frac{x}{2^{n+1}})}{\frac{x}{2^{n+1}}} = \frac{g(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} = v_n = v_0.$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0.$$

En particulier, $v_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$, ce qui signifie $g(x) = ax$. Ainsi, il existe un réel a tel que, pour tout réel x non nul, $g(x) = ax$. Ceci restant clair pour $x = 0$, on a montré que :

$$\boxed{g \text{ est linéaire.}}$$

23.- Soit f une solution. D'après 9.-, $f(0) \in \{-1,0,1\}$. D'après 17.-, si $f(0) \in \{-1,1\}$, f est constante sur $\mathbb{R}$ et réciproquement, si f est la constante 1 ou la constante -1, f est solution d'après 8.-.

Sinon, $f(0) = 0$, et d'après 22.-, il existe un réel a tel que, pour tout réel x, $g(x) = ax$ ou encore $f(x) = \tanh(ax)$. Réciproquement, une telle fonction est solution d'après 12.-. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ solution} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1) \text{ ou } (\exists a \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \tanh(ax)).}$$

ALGEBRE

Partie I :

1.- La formule du binôme de NEWTON fournit :

$$A = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = X \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1} = X \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n}{k+1} X^k.$$

Ainsi,

$$\boxed{A = XB \text{ où } B = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n}{k+1} X^k.}$$

B est un polynôme de degré $2n-1$, de coeffcient dominant $\binom{2n}{2n} = 1$, et de coefficient constant $b_0 = \binom{2n}{1} = 2n$.

2.- Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} A(z) = 0 &\Leftrightarrow (z+1)^{2n} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] /\ z+1 = e^{2ik\pi/2n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] /\ z = -1 + e^{ik\pi/n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] /\ z = e^{ik\pi/2n}(e^{ik\pi/2n} - e^{-ik\pi/2n}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] /\ z = 2\sin\frac{k\pi}{2n} e^{i(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les racines de } A \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont } z_0 = 0 \text{ et les nombres } z_k = 2\sin\frac{k\pi}{2n} e^{i(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2})},\ 1 \leq k \leq 2n-1.}$$

Maintenant, pour $1 \leq k \leq 2n-1$,

$$0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{k\pi}{2n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$$

et donc $2\sin\frac{k\pi}{2n} > 0$. L'écriture $z_k = 2\sin\frac{k\pi}{2n} e^{i(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2})}$ est donc la forme trigonométrique de z_k, $1 \leq k \leq 2n-1$. On note que ces nombres dont deux à deux distincts et donc que A et B sont à racines simples.

3.- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans P_n osons $l = 2n - k$.

$$P_n = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\frac{(2n-l)\pi}{2n} = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{l\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{2n}\right).$$

Donc, $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$. Par suite,

$$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \times \sin\frac{\pi}{2} \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = P_n^2.$$

Mais, on a déjà vu que, pour $1 \leq k \leq 2n-1$, $\sin\frac{k\pi}{2n} > 0$. Donc, $P_n > 0$ et

$$\boxed{P_n = \sqrt{Q_n}.}$$

4.- $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des racines de B. Or,

$$B = (X - z_1)...(X - z_{2n-1}) = X^{2n-1} - ... + 2n.$$

On en déduit que $(-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k = 2n$ et donc que $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$. Mais d'autre part,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= \prod_{k=1}^{2n-1} 2\sin\frac{k\pi}{2n} e^{i(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2})} = 2^{2n-1} Q_n e^{i(\frac{(2n-1)(2n)}{2n}\frac{\pi}{2}+\frac{(2n-1)\pi}{2})}\\ &= 2^{2n-1} Q_n e^{i(2n-1)\pi} = -2^{2n-1} Q_n\end{aligned}$$

Par suite, $Q_n = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}$, et finalement

$$\boxed{P_n = \sqrt{Q_n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.}$$

5.- La fraction F est irréductible. La partie entière de F est nulle. Les pôles de F sont simples. La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc :

$$F = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\lambda_k}{X - z_k},$$

avec

$$\lambda_k = \frac{1}{A'(z_k)} = \frac{1}{2n(1 + z_k)^{2n-1}} = \frac{1 + z_k}{2n((1 + z_k)^{2n})} = \frac{e^{ik\pi/n}}{2n}.$$

Donc,

$$\boxed{F = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{ik\pi/n}}{X + 1 - e^{ik\pi/n}}.}$$

<u>Partie II</u> :

6.- Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, puis $f = \lambda I_E$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution } &\Leftrightarrow (\lambda I_E + I_E)^{2n} - I_E = \theta \Leftrightarrow ((\lambda + 1)^{2n} - 1)I_E = \theta\\ &\Leftrightarrow A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n - 1]\!] / \ \lambda = -1 + e^{ik\pi/n}.\end{aligned}$$

Les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée sont les applications de la forme $(-1+e^{ik\pi/n})I_E$, $0 \leq k \leq 2n - 1$.

7.- La formule du binôme de Newton fournit

$$2^{2n} = (1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = S + S',$$

et, puisque $2n > 0$,

$$0 = (1 - 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} = S - S'.$$

En additionnant et en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$\boxed{S = S' = \frac{1}{2}2^{2n} = 2^{2n-1}.}$$

8.- Si s est une symétrie de E, $s^2 = I_E$, et donc plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, $s^{2k} = I_E$ et $s^{2k+1} = s$. Par suite, puisque s et I_E commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$(s + I_E)^{2n} - I_E = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} s^k - I_E = SI_E + S's - I_E = (2^{2n-1} - 1)I_E + 2^{2n-1}s.$$

s est solution de l'équation proposée si et seulement si $(2^{2n-1} - 1)I_E + 2^{2n-1}s = 0$. Composons les deux membres par s à gauche. On obtient $(2^{2n-1} - 1)s + 2^{2n-1}I_E = 0$. En retranchant ces deux égalités, on obtient $s = I_E$.

Réciproquement, si $s = I_E$, $(s+I_E)^{2n} - I_E = (2^{2n-1} - 1)I_E$. Donc, s est solution si et seulement si $2^{2n-1} = 1$ ou encore $n = \frac{1}{2}$ ce qui est exclu.

$$\boxed{\text{Aucune symétrie de } E \text{ n'est solution de l'équation proposée.}}$$

Partie III :

9.- Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors,

$$G = \{aI + bJ,\ (a, b) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}(I, J).$$

Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De plus, la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc la famille (I, J) est libre. La famille (I, J) est également génératrice de G et donc une base de G.

$$\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ de dimension 2. Une base de } G \text{ est } (I, J).}$$

Vérifions que G est stable pour le produit matriciel. Tout d'abord,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + J.$$

Mais alors, pour $(a, b, a', b') \in \mathbb{C}^4$,

$$\begin{aligned}(aI + bJ)(a'I + b'J) &= aa'I + (ab' + ba')J + bb'J^2 = aa'I + (ab' + ba')J + bb'(2I + J) \\ &= (aa' + 2bb')I + (ab' + ba' + bb')J \in G,\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat.

$$\boxed{G \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

10.- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned}xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \text{Ker}(u - (a + 2b)I_E) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - (a + 2b) & b & b \\ b & a - (a + 2b) & b \\ b & b & a - (a + 2b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right. \quad (\text{car } b \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2x - y \\ x - 2y + (2x - y) = 0 \\ x + y - 2(2x - y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{E_1 \text{ est la droite vectorielle engendrée par } e'_1 = e_1 + e_2 + e_3.}$$

11.- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned} xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \operatorname{Ker}(u - (a-b)I_E) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-(a-b) & b & b \\ b & a-(a-b) & b \\ b & b & a-(a-b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \end{aligned}$$

E_2 est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. $e'_2 = e_1 - e_2$ et $e'_3 = e_1 - e_3$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan. (e'_2, e'_3) est donc une base de E_2.

$$\boxed{E_2 \text{ est le plan vectoriel de base } (e'_2, e'_3) \text{ où } e'_2 = e_1 - e_2 \text{ et } e'_3 = e_1 - e_3.}$$

12.- La matrice de la famille (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base B est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut $1 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$. On en déduit que B'$= (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

13.- Par définition de B', on a immédiatement

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a+2b, a-b, a-b).}$$

14.- On a vu que $P = \mathscr{P}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B'}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Maintenant,

$$\left\{\begin{array}{l} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_1 - e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_2 = e_1 - e'_2 \\ e_3 = e_1 - e'_3 \\ e'_1 = e_1 + (e_1 - e'_2) + (e_1 - e'_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{3}(e'_1 + e'_2 + e'_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(e'_1 - 2e'_2 + e'_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(e'_1 + e'_2 - 2e'_3) \end{array}\right.$$

Ainsi, $P^{-1} = \mathscr{P}_{\mathrm{B'}}^{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

15.- Les formules de changement de bases fournissent $M = PDP^{-1}$.

16.-

$$\begin{aligned} M \text{ solution de } (*) &\Leftrightarrow (M + I)^{2n} = I_E \Leftrightarrow P(M + I)^{2n}P^{-1} = P.I_E.P^{-1} \\ &\Leftrightarrow (P(M + I)P^{-1})^{2n} = I_E \Leftrightarrow (PMP^{-1} + I)^{2n} = I_E \Leftrightarrow (D + I)^{2n} = I_E \\ &\Leftrightarrow D \text{ solution de } (*) \end{aligned}$$

17.- $D = \mathrm{diag}(a+2b, a-b, a-b)$. Donc, $(D+I)^{2n} = \mathrm{diag}((a+2b+1)^{2n}, (a-b+1)^{2n}, (a-b+1)^{2n})$. Par suite,

$$\begin{aligned}
D \text{ solution de } (*) &\Leftrightarrow a+2b \text{ et } a-b \text{ racines de } A \text{ et } b \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \exists (k,l) \in [\![0, 2n-1]\!]^2 / \left\{ \begin{array}{l} a+2b = -1 + e^{ik\pi/n} \\ a-b = -1 + e^{il\pi/n} \end{array} \right. \text{ et } b \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \exists (k,l) \in [\![0, 2n-1]\!]^2 / \left\{ \begin{array}{l} b = \dfrac{1}{3}(e^{ik\pi/n} - e^{il\pi/n}) \\ a = \dfrac{1}{3}(-3 + e^{ik\pi/n} + 2e^{il\pi/n}) \end{array} \right. \text{ et } k \neq l
\end{aligned}$$

18.- Les $M_{a,b}$ telles que $b \neq 0$ solutions de $(*)$ sont les matrices correspondant aux couples (a, b) précédents.

Quand $b = 0$, $M = aI$ est une matrice scalaire ou encore une matrice d'homothétie. Les solutions ont été déterminées en II. Elles correspondent aux couples ci-dessus dans lesquels on a $k = l$.

Les solutions de l'équation $(*)$ dans G sont les matrices de la forme $aI + bJ$ où

$$a = \frac{1}{3}(-3 + e^{ik\pi/n} + 2e^{il\pi/n}) \text{ et } b = \frac{1}{3}(e^{ik\pi/n} - e^{il\pi/n}) \text{ avec } (k,l) \in [\![0, 2n-1]\!]^2.$$

