CONCOURS COMMUN SUP 2002

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques

(toutes filières)

Mardi 21 mai 2002 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats :

- doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4,
- sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées,
- colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

PROBLEME D' ANALYSE

1. *Soit f l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $f(0) = 1$ *et* $\forall t \neq 0,\ f(t) = \dfrac{Arctan(t)}{t}$.

1.1 *Montrer que f est continue sur* $\mathbb{R}$ *et paire.*

1.2 *Donner le développement limité à l'ordre 1 de f(t) au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0, et donner* $f^{'}(0)$.

1.3 *Justifier que f est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et calculer* $f^{'}(t)$, *pour* $t \in \mathbb{R}^*$.

1.4 *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :* $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw = -\frac{1}{2}\ t^2\ f^{'}(t)$.

En déduire le sens de variation de f.

1.5 *Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).*

(On ne demande pas l'étude des points d'inflexion)

2. *Soit* ϕ *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $\phi(0) = 1$ *et* $\forall x \neq 0,\ \phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

2.1 *Montrer que* ϕ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et paire.*

2.2 *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \phi(x) \leq 1$. *(on pourra commencer par supposer* $x > 0$*)*

2.3 *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \phi^{'}(x) = \dfrac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$.

Montrer que ϕ *est dérivable en 0, avec* $\phi^{'}(0) = 0$. *Donner les variations de* ϕ.

2.4 *Montrer que :* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$. *En déduire que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

2.5 *Tracer la courbe représentative de* ϕ *dans le même repère que celle de f.*

(On ne demande pas l'étude des points d'inflexions)

3. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et pour tout n de* $\mathbb{N}$ *:* $u_{n+1} = \phi(u_n)$, *où* ϕ *est l'application du 2).*

3.1 *Montrer que :* $\forall t \geq 0,\ 0 \leq \dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

3.2 *Montrer que, pour tout x strictement positif :* $\mid \phi^{'}(x) \mid \leq \dfrac{1}{x}\big(1 - f(x)\big) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$. *(On pourra utiliser 2.2 et 2.3). En déduire que, pour tout x strictement positif :* $\mid \phi^{'}(x) \mid \leq \dfrac{1}{4}$, *et que cette inégalité reste vérifiée pour tout x de* $\mathbb{R}$.

3.3 *Montrer que l'équation :* $x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = x$ *admet une unique solution. On note* α *cette solution. Montrer que* $\alpha \in]0; 1]$.

3.4 Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \dfrac{1}{4} \mid u_n - \alpha \mid$.

En déduire que (u_n) *est convergente, et préciser sa limite.*

4. *On considère l'équation différentielle :* $x^2 y' + xy = Arctan(x)$.

4.1 Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.

4.2 Montrer que ϕ *est l'unique solution sur* $\mathbb{R}$ *de cette équation différentielle.*

PROBLEME D'ALGEBRE

Dans ce problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension trois, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base orthonormée de E. La norme de E est notée* $\| \, . \, \|$. *On note* $\mathcal{L}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes de E,* $GL(E)$ *l'ensemble des automorphismes de E,* Id_E *l'application identique de E,* o_E *le vecteur nul de E.*

$\mathcal{E}$ *désigne un espace affine euclidien associé à E,* $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ *un repère orthonormé de* $\mathcal{E}$.

1. *Soit* ψ *l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à* $\mathcal{B}$ *est* $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   1.1 Montrer que $\dfrac{4}{3}\psi$ *est un demi-tour dont on précisera l'axe D.*

   1.2 En déduire que ψ *est la composée commutative de deux endomorphismes simples de E que l'on précisera.*

2. *On note* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des endomorphismes* φ *de E pour lesquels :*

$$\exists k \in [0; 1[, \ \forall x \in E, \| \varphi(x) \| \leq k \| x \|$$

   2.1 Montrer que ψ *appartient à* $\mathcal{S} \cap GL(E)$.

   2.2 Id_E *appartient-il à* $\mathcal{S}$ *?*

   2.3 Montrer que $\mathcal{S}$ *est stable pour* $\circ$. $\mathcal{S} \cap GL(E)$ *est-il un sous-groupe de* $(GL(E), \circ)$ *?*

   2.4 Soit φ *un élément de* $\mathcal{S}$. *Montrer que* $Ker(\varphi - Id_E) = \{o_E\}$. *En déduire que* $(\varphi - Id_E)$ *appartient à* $GL(E)$.

   2.5 Montrer que $\varphi \in \mathcal{S}$ *si et seulement si* $\exists k \in [0; 1[, \ \forall x \in E, \ \Big(\| x \| = 1 \Longrightarrow \| \varphi(x) \| \leq k\Big)$.

   2.6 Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de* φ *est diagonale, à éléments diagonaux strictement inférieurs à 1 en valeur absolue. Montrer que* $\varphi \in \mathcal{S}$.

3. *Soit* μ *l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à* $\mathcal{B}$ *est* $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   3.1 On définit : $e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ *et* $e_3' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$.
   Vérifier que (e_1', e_2', e_3') *est une base orthonormée* $\mathcal{B}'$ *de E.*

   3.2 Déterminer la matrice de μ *dans la base* $\mathcal{B}'$. *En déduire que* $\mu \in \mathcal{S}$.

4. Soit φ_α l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est $M_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On se propose de prouver que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ si et seulement si $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$.

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur de E de norme 1.

4.1 Montrer que : $\| \varphi_\alpha(x) \|^2 = \alpha^2\big(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2\big)$.

4.2 Le vecteur x s'écrit, dans la base $\mathcal{B}'$ du 3.1 : $x = x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3'$.

Montrer que : $\| \varphi_\alpha(x) \|^2 = \alpha^2\big(1 + 3{x_1'}^2\big)$. *En déduire que :* $\| \varphi_\alpha(x) \| \leq 2\,|\alpha|$.

Déterminer l'ensemble des x de E de norme 1 pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.

4.3 Montrer que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ si et seulement si $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$.

5. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé φ appartient à $\mathcal{S}$.

5.1 Soit M un point de $\mathcal{E}$. Montrer que M est invariant par f si et seulement si

$\big(\varphi - Id_E\big)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}$.

5.2 En déduire que f admet un point invariant et un seul, que l'on note Ω.

5.3 Justifier l'égalité : $\forall M \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{\Omega f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

5.4 On définit la suite (M_n) de points de $\mathcal{E}$ par $M_0 \in \mathcal{E}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = f(M_n)$.

5.4.1 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \| \overrightarrow{\Omega M_n} \| = 0$.

5.4.2 Soient (x_n), (y_n) et (z_n) les suites réelles définies par : x_0, y_0 et z_0 sont des réels, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n + \frac{1}{2} \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}z_n + 1 \end{cases}.$$

Montrer que (x_n), (y_n) et (z_n) sont convergentes, et préciser leurs limites respectives.