CONCOURS COMMUN SUP 2003
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, D'ALES, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Proposition de Correction

Problème 1

1. – Lorsque t tend vers $-\infty$, e^{-t} tend vers 0^+ et $1+t^2$ tend vers $+\infty$, donc $\boxed{f(t) \text{ tend vers } 0^+}$.

2. – C_f présente une asymptote d'équation $y = 0$; comme $f(t) > 0$ pour tout réel t, la courbe est entièrement au-dessus de cette asymptote.

3. – $\boxed{f(t) \text{ est négligeable devant } e^t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ car $\dfrac{f(t)}{e^t} = \dfrac{1}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{f(t) \text{ est négligeable devant } \dfrac{e^t}{t}}$ lorsque t tend vers $+\infty$ car $\dfrac{f(t)}{e^t/t} = \dfrac{t}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^t}{t^2}}$ car $\dfrac{f(t)}{e^t/t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$.

4. – Par raison de croissances comparées, $\dfrac{e^t}{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Le troisième résultat de la question **3** montre que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

5. – $f'(t) = \dfrac{(1+t^2)e^t - 2te^t}{(1+t^2)^2} = \dfrac{(t^2-2t+1)e^t}{(1+t^2)^2} = \boxed{\dfrac{(t-1)^2e^t}{(1+t^2)^2}}$.

6. – Il est clair que $f'(t) \geqslant 0$ pour tout réel t, l'inégalité étant stricte sauf pour $t = 1$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Avec les résultats des questions **1** et **4**, on peut dresser le tableau de variation ci-contre.

t	$-\infty$		$+\infty$
$f(t)$	0^+	$\nearrow$	$+\infty$

7. – Notons $u(t) = (t-1)^2e^t$ et $v(t) = 1+t^2$. Alors $f' = \dfrac{u}{v^2}$, donc : $f'' = \dfrac{v^2u' - 2vv'u}{v^4} = \dfrac{vu' - 2v'u}{v^3}$.
Or $u'(t) = 2(t-1)e^t + (t-1)^2e^t = (t^2-1)e^t$ et $v'(t) = 2t$; nous obtenons donc :

$$
\begin{aligned}
f''(t) &= \frac{(1+t^2)(t^2-1)e^t - 4t(t-1)^2e^t}{(1+t^2)^3} = \frac{(t^3+t^2+t+1-4t^2+4t)(t-1)e^t}{(1+t^2)^3} \\
&= \frac{(t^3-3t^2+5t+1)(t-1)e^t}{(1+t^2)^3}
\end{aligned}
$$

8. – La solution évidente est $t_1 = 1$. Observons les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\psi : t \mapsto t^3 - 3t^2 + 5t + 1$. Nous avons $\psi'(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 > 0$, donc ψ est strictement croissante. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{-\infty}\psi, \lim\limits_{+\infty}\psi\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Par conséquent, ψ s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$; ceci nous donne la deuxième solution de l'équation $f''(t) = 0$.

9. – Nous remarquons que $\psi(-1/5) = (-1/5)^3 - 3(-1/5)^2 + 5(-1/5) + 1 = -1/125 - 3/25 < 0$, tandis que $\psi(0) = 1 > 0$. Le TVI affirme que ψ s'annule dans l'intervalle $]-1/5, 0[$, d'où l'encadrement demandé.

10. – Utilisons les $DL_3(0)$ de exp et de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$:

$$f(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \times \left(1 - t^2 + o(t^3)\right) = \boxed{1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3)}$$

Nous en déduisons que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$, et que $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessous de cette tangente.

11. – La courbe représentative représentée à la figure 1 a été obtenue avec le *script* Maple suivant :

```
f := t -> exp(t)/(1+t^2);
plot([f,exp(1)/2],-4..4,scaling=constrained);
```

En vue de son incorporation dans le présent document, j'ai inséré (avant le `plot`) la commande suivante, pour « exporter » le tracé au format *PostScript* :

```
plotsetup(ps,plotoutput='pb1a.ps',
 plotoptions='portrait,noborder,height=1000,width=1000');
```

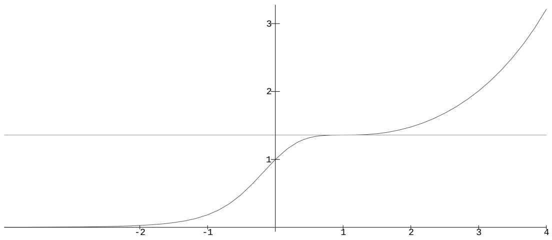

Figure 1 : courbe représentative de f

f'' s'annule en changeant de signe, au voisinage de 1 ; donc le point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion : la courbe traverse sa tangente en ce point.

12. – Immédiat, avec les résultats des questions **5** et **7** :

n	0	1	2
P_n	1	X^2-2X+1	$X^4-4X^3+8X^2-4X-1$

13. – Nous partons de l'égalité $f^{(n)}(t)=\dfrac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$; par dérivation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(t)=\frac{d}{dt}\big(f^{(n)}(t)\big)&=\frac{d}{dt}\Big(\frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}\Big)\\&=\frac{(1+t^2)^{n+1}\big(P_n'(t)e^t+P_n(t)e^t\big)-2(n+1)t(1+t^2)^nP_n(t)e^t}{(1+t^2)^{2(n+1)}}\\&=\Big((1+t^2)\big(P_n'(t)+P_n(t)\big)-2(n+1)tP_n(t)\Big)\frac{e^t}{(1+t^2)^{n+2}}\end{aligned}$$

Notons $P_{n+1}\,:\,t\in\mathbb{R}\mapsto(1+t^2)P_n'(t)+\big(t^2-2(n+1)t+1\big)P_n(t)$: il est clair que P_{n+1} est une fonction polynôme, et l'on a $f^{(n+1)}(t)=\dfrac{P_{n+1}(t)e^t}{(1+t^2)^{(n+1)+1}}$ pour tout réel t. Traduite en termes de polynômes, l'égalité définissant P_{n+1} devient $\boxed{P_{n+1}=(1+X^2)P_n'+\big(X^2-2(n+1)X+1\big)P_n}$.

14. – Raisonnons par récurrence. Comme $P_0=1$, l'assertion est vérifiée au rang 0. Supposons-la acquise au rang n : alors P_n' est elle aussi une fonction polynôme dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$; il en est de même de $1+X^2$ et de $X^2-2(n+1)X+1$. Par produit et somme, il en est de même de P_{n+1}. Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

15. – Au vu des expressions de P_0, P_1 et P_2, il semble raisonnable de noter $\mathcal{C}(n)$ l'assertion suivante :

$$\boxed{P_n \text{ est unitaire de degré } 2n}$$

$\mathcal{C}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{C}(n)$ acquise. Alors $(1+X^2)P_n'$ est de degré strictement inférieur à $2n+2$, tandis que $\big(X^2-2(n+1)X+1\big)P_n$ est unitaire de degré $2n+2$. Donc P_{n+1} est unitaire de degré $2n+2=2(n+1)$, ce qui établit $\mathcal{C}(n+1)$ et termine la démonstration par récurrence.

16. – Nous avons $c_0=P_0(i)=1$, et $c_{n+1}=P_{n+1}(i)=(1+i^2)P_n'(i)+\big(i^2-2(n+1)i+1\big)P_n(i)=-2(n+1)ic_n$. Les c_n sont donc tous non nuls ; ceci autorise le télescopage suivant (on effectue, à la dernière étape, le changement d'indice $k'=k+1$) :

$$c_n=c_0\times\prod_{k=0}^{n-1}\frac{c_{k+1}}{c_k}=\prod_{k=0}^{n-1}\big(-2(k+1)i\big)=(-2i)^n\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)=(-2i)^n\prod_{k=1}^{n}k=\boxed{(-2i)^nn!}$$

17. – $F'=f$ ne prend que des valeurs strictement positives, donc $\boxed{F \text{ est strictement croissante}}$.

18. – Il suffit de montrer que F est minorée. Il est clair que $f(t) < e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors, pour $x < 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -\int_x^0 f(t)\,dt \geqslant -\int_x^0 e^t\,dt = -\big[e^t\big]_x^0 = -1 + e^x > -1$$

Ce qui termine la preuve, en utilisant le théorème de la limite monotone.

19. – Comme F est croissante, on a $F(x) \leqslant F(0) = 0$ pour $x \leqslant 0$. L'encadrement $-1 < F(x) \leqslant 0$ nous donne alors $\boxed{-1 \leqslant \ell \leqslant 0}$ par passage à la limite.

20. – $F'(0) = f(0) = 1$; comme $F(0) = 0$, l'équation demandée est $\boxed{y = x}$.

21. – Il suffit d'intégrer terme à terme le DL_3 établi à la question **10**, en n'oubliant pas de prendre en compte la valeur de $F(0)$:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

22. – *Méthode 1* : notons $\Phi :\ x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - f(x) - 2J(x)$. Alors :

$$\Phi'(x) = F'(x) - f'(x) - 2J'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} - \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1 + x^2 - x^2 + 2x - 1 - 2x)e^x}{(1+x^2)^2} = 0$$

Ceci montre que Φ est constante. Il suffit de noter A sa valeur constante pour avoir le résultat.

Méthode 2 : appliquons une IPP à l'intégrale $F(x)$. Les fonctions $u :\ t \mapsto e^t$ et $v :\ t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Ceci autorise le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt = \int_0^x u'(t)v(t)\,dt = \big[u(t)v(t)\big]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\,dt \\
&= \Big[f(t)\Big]_0^x - \int_0^x e^t\Big(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\Big)dt = f(x) - f(0) + 2\int_0^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2}\,dt \\
&= f(x) - 1 + 2\big(J(x) - J(0)\big) = f(x) - 1 - 2J(0) + 2J(x)
\end{aligned}$$

Ce qui établit le résultat demandé, avec $\boxed{A = -1 - 2J(0)}$.

23. – $J(x) \geqslant 0$ est clair. Par ailleurs, on a certainement $1 + t^2 \geqslant t^2$, donc $\dfrac{t}{(1+t^2)^2} \leqslant \dfrac{t}{t^4} = \dfrac{1}{t^3}$ puis $\dfrac{te^t}{(1+t^2)^2} \leqslant \dfrac{e^t}{t^3}$ pour $t \geqslant 1$; par intégration sur $[1, x]$, on obtient $J(x) \leqslant K(x)$. Ainsi $\boxed{0 \leqslant J(x) \leqslant K(x)}$.

24. – Soit $x > 1$. Les fonctions $\varphi :\ t \in [1, x] \mapsto e^t$ et $\psi :\ t \in [1, x] \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Ceci justifie l'IPP suivante :

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt = \int_1^x \varphi'(t)\psi(t)\,dt = \Big[\varphi(t)\psi(t)\Big]_1^x - \int_1^x \varphi(t)\psi'(t)\,dt \\
&= \Big[\frac{e^t}{t^3}\Big]_1^x - \int_1^x e^t\Big(-\frac{3}{t^4}\Big)\,dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3L(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $K(x) - 3L(x) = \dfrac{e^x}{x^3} - e$, quantité qui est manifestement négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25. – Remarquons que le point $\xi = x^{3/4}$ en lequel l'énoncé propose d'effectuer la coupure se trouve effectivement dans l'intervalle $[1, x]$ puisque $x \geqslant 1$. Notant $L_1(x) = \displaystyle\int_1^\xi \frac{e^t}{t^4}\,dt$ et $L_2(x) = \displaystyle\int_\xi^x \frac{e^t}{t^4}\,dt$, nous aurons $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$. Étudions chacune de ces intégrales :

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \int_1^{\xi} \frac{e^t}{t^4}\,dt \leqslant \int_1^{\xi} \frac{e^{\xi}}{t^4}\,dt = e^{\xi}\int_1^{\xi}\frac{dt}{t^4} = e^{\xi}\Big[-\frac{1}{3t^3}\Big]_1^{\xi} = e^{\xi}\Big(-\frac{1}{3\xi^3}+\frac{1}{3}\Big) \\
&= \frac{e^{\xi}}{3}\Big(1-\frac{1}{x^{9/4}}\Big) = \frac{e^x}{x^2}\times\frac{x^2}{3e^{x-\xi}}\Big(1-\frac{1}{x^{9/4}}\Big) \\
L_2(x) &= \int_{\xi}^{x} \frac{e^t}{t^4}\,dt \leqslant \int_{\xi}^{x} \frac{e^x}{t^4}\,dt = e^x\int_{\xi}^{x}\frac{1}{t^4}\,dt = e^x\Big[-\frac{1}{3t^3}\Big]_{\xi}^{x} = e^x\Big(\frac{1}{3\xi^3}-\frac{1}{3x^3}\Big) \\
&= \frac{e^x}{x^2}\times\frac{x^2}{3}\Big(\frac{1}{x^{9/4}}-\frac{1}{x^3}\Big) = \frac{e^x}{x^2}\Big(\frac{1}{3x^{1/4}}-\frac{1}{3x}\Big)
\end{aligned}$$

Remarquons que $\xi = x^{3/4}$ est un $o(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$; donc $x-\xi \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, d'où :

$$\frac{x^2}{3e^{x-\xi}} = \frac{x^2}{3(x-\xi)^2}\times\frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\times\frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}}$$

L'équivalent signalé plus haut implique $x-\xi \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$; alors, par raison de croissances comparées, $\dfrac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$; donc $\dfrac{x^2}{3e^{x-\xi}}$ est un $o(1)$ lorsque x tend vers $+\infty$. D'autre part, $1-\dfrac{1}{x^{9/4}}$ est un $\mathcal{O}(1)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous pouvons donc affirmer que $L_1(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ dans les mêmes conditions.

De même : $\dfrac{1}{3x^{1/4}}-\dfrac{1}{3x}$ est un $o(1)$ lorsque x tend vers $+\infty$; donc $L_2(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ dans les mêmes conditions.

Finalement, $L(x) = L_1(x)+L_2(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26. – $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$. Or $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2}$; la constante A est un $o\Big(\dfrac{e^x}{x^2}\Big)$. Enfin, $0 \leqslant J(x) \leqslant K(x)$ implique que $J(x)$ est dominé par $K(x)$; mais les résultats des questions **24** et **25** montrent que $K(x)$ est un $o\Big(\dfrac{e^x}{x^2}\Big)$. Finalement, $\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2}}$.

27. – La courbe représentative de F est convexe puisque $F' = f$ est croissante. Elle possède une asymptote d'équation $y = k$ (avec $k \approx -0.62$) ; cette asymptote apparaît sur la figure.

L'équivalent obtenu à la question **26** montre que la courbe possède une direction asymptotique « verticale » lorsque x tend vers $+\infty$.

La courbe passe par l'origine puisque $F(0) = 0$; et la tangente en ce point a pour pente $F'(0) = f(0) = 1$, donc son équation est $y = x$.

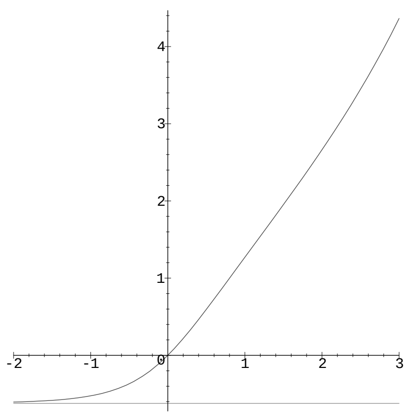

Figure 2 : courbe représentative de F

Problème 2

1. – Le noyau de $\mathbf{D}$ est l'ensemble des fonctions constantes. L'image de $\mathbf{D}$ est l'espace E entier : en effet, soit $f \in \mathrm{E}$; f est continue, donc possède des primitives. Soit F l'une d'elles : alors $\mathbf{D}(F) = f$. Donc F est de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce qui en fait un élément de E ; et c'est un antécédent de f, ce qui montre que $\mathbf{D}$ est surjectif.

2. – Il est clair que $t = 0$ est un bon choix ; nous prendrons également $u = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $v = -\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} = -u$. Écrivons le système correspondant :

$$\begin{cases} af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) &= 0 \\ af_1(u) + bf_2(u) + cf_3(u) &= 0 \\ af_1(v) + bf_2(v) + cf_3(v) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c &= 0 \\ ae^u + be^{-u/2} &= 0 \\ ae^{-u} + be^{u/2} &= 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système formé par les deux dernières équations est $e^{3u/2} - e^{-3u/2} = 2\,\mathrm{sh}(3u/2)$; comme u n'est pas nul, ce déterminant n'est pas nul, donc la seule solution de ce système homogène est $a = b = 0$; en reportant dans la première égalité, nous obtenons $c = 0$, ce qui termine la preuve.

3. – Nous avons :

$$\begin{aligned}(af_1 + bf_2 + cf_3)(t) = af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) &= ae^t + be^{-t/2}\sin\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) + ce^{-t/2}\cos\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) \\ &= a\Big(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\Big) + b\Big(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\Big) \times \Big(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)\Big) \\ &\quad + c\Big(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\Big) \times \Big(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\Big) \\ &= a + at + \frac{at^2}{2} + \frac{bt\sqrt{3}}{2} - \frac{bt^2\sqrt{3}}{4} + c - \frac{ct}{2} - \frac{ct^2}{4} + o(t^2) \\ &= (a + c) + \Big(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\Big)t + \Big(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\Big)t^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

L'unicité du DL nous donne le système :

$$\begin{cases} a & & +c & = 0 & \mathcal{L}_1 \\ a & +\dfrac{b\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{c}{2} & = 0 & \mathcal{L}_2 \\ \dfrac{a}{2} & -\dfrac{b\sqrt{3}}{4} & -\dfrac{c}{4} & = 0 & \mathcal{L}_3 \end{cases}$$

En observant $\mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_3$, nous obtenons $b = 0$. Par ailleurs, $\mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_3$ nous donne $2a - c = 0$, ce qui, avec $\mathcal{L}_1$, nous donne $a = c = 0$. Conclusion : $a = b = c = 0$, et la famille $\mathcal{B}$ est libre.

4. – Lorsque t tend vers $+\infty$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$ tendent vers 0 tandis que $f_1(t)$ tend vers $+\infty$. Ceci impose $\boxed{a = 0}$. Nous avons donc $bf_2(t) + cf_3(t) = 0$, soit $be^{-t/2}\sin\Big(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big) + ce^{-t/2}\cos\Big(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big) = 0$ ou encore $b\sin\Big(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big) + c\cos\Big(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big) = 0$ pour tout réel t. Les parités respectives de sin et cos imposent alors $\boxed{b = 0}$ et $\boxed{c = 0}$.

5. – Par linéarité, il suffit de prouver que $\mathbf{D}(f_1)$, $\mathbf{D}(f_2)$ et $\mathbf{D}(f_3)$ sont toutes trois dans G. Or :

$$\big(\mathbf{D}(f_1)\big)(t) = f_1'(t) = e^t = f_1(t)$$

$$\big(\mathbf{D}(f_2)\big)(t) = f_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\cos\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) = -\frac{1}{2}f_2(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3(t)$$

$$\big(\mathbf{D}(f_3)\big)(t) = f_3'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\sin\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2(t) - \frac{1}{2}f_3(t)$$

Ces égalités valent pour tout réel t. Nous en déduisons $\mathbf{D}(f_1) = f_1$, $\mathbf{D}(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $\mathbf{D}(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$ ce qui termine la preuve.

6. – Il suffit d'appliquer le résultat de la question **5** : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

7. – Nous obtenons successivement $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. – Nous avons établi $\mathrm{M}^3 = I_3$: donc $\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^2 = \mathrm{M}^2 \cdot \mathrm{M} = I_3$, ce qui montre que M est inversible, et que $\boxed{\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^2}$.

9. – Nous savons déjà (question **5**) que $\widehat{\mathbf{D}}$ est un endomorphisme de G. La matrice de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible, donc $\widehat{\mathbf{D}}$ est un automorphisme de G.

10. – La relation $\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^2$ nous donne immédiatement $\widehat{\mathbf{D}}^{-1} = \widehat{\mathbf{D}}^2$.

11. – Voici le tableau demandé :

i	$f_i(0)$	$f_i'(0)$	$f_i''(0)$
1	1	1	1
2	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

12. – Linéarité, symétrie, positivité sont claires. Il nous reste à montrer que l'égalité $\varphi(g,g) = 0$ implique que g est la fonction nulle. Soient a, b et c les coordonnées de g dans la base $\mathcal{B}$ de G : ainsi $g = af_1 + bf_2 + cf_3$. Alors :

$$\begin{aligned} \big(g(0)\big)^2 &= \big(a+c\big)^2 \\ \big(g'(0)\big)^2 &= \big(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\big)^2 \\ \big(g''(0)\big)^2 &= \big(a - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\big)^2 \end{aligned}$$

Or $\varphi(g,g) = \big(g(0)\big)^2 + \big(g'(0)\big)^2 + \big(g''(0)\big)^2$; l'égalité $\varphi(g,g) = 0$ implique que les trois carrés sont nuls ; donc $a + c = 0$, $a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0$ et $a - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0$. Nous retrouvons le système établi et résolu à la question **3** ; donc $\boxed{a = b = c = 0}$ ce qui termine la preuve.

Remarquons que l'étudiante Lucie, voyant que $g(0)$, $g'(0)$ et $g''(0)$ sont tous trois nuls, peut tout de suite conclure...

13. – Nous vérifions sans peine que $\varphi(f_1, f_2)$, $\varphi(f_1, f_3)$ et $\varphi(f_2, f_3)$ sont tous trois nuls. Donc $\boxed{\text{la base } \mathcal{B} \text{ est orthogonale}}$.

14. – Nous constatons que $\varphi(f_1, f_1) = 3$. Donc $\boxed{\text{la base } \mathcal{B} \text{ n'est pas orthonormée}}$.

15. – Par définition, f est de classe $\mathcal{D}^3$. Supposons f de classe $\mathcal{D}^{3k}$: alors $f''' = f$ montre que f''' est de classe $\mathcal{D}^{3k}$, donc f est de classe $\mathcal{D}^{3k+3}$. Par récurrence, nous obtenons que f est de classe $\mathcal{D}^{3k}$ pour tout $k \geqslant 1$, donc f de classe $\mathcal{D}^\infty$, ce qui est la même chose qu'être de classe $\mathcal{C}^\infty$.

16. – Que la fonction nulle soit une solution polynomiale de $(\mathcal{E})$ est une conséquence de la linéarité de cette équation. C'est la seule : si f est une fonction polynôme autre que la fonction nulle, alors, notant n son degré, nous aurons $\deg(f''') \leqslant n - 3$, donc f''' ne peut être égale à f.

17. – Ceci est une conséquence immédiate de l'égalité établie à la question **7** : chaque élément de G est invariant par $\widehat{\mathbf{D}}^3$, donc par $\mathbf{D}^3$, ce qui revient à dire qu'il appartient au noyau de $\mathbf{T}$.

18. – f est de classe $\mathcal{D}^3$, donc f, f' et f'' sont dérivables ; alors g est dérivable en tant que somme de fonctions qui le sont. $g' = (f'' + f' + f)' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = f'' + f' + f = g$ puisque $f''' = f$. Donc g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

19. – C'est la droite vectorielle engendrée par f_1.

20. – Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, à coefficients constants et homogène. La théorie nous dit de résoudre d'abord l'équation caractéristique associée $r^2 + r + 1 = 0$: le discriminant de celle-ci est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$; donc cette équation possède deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions *à valeurs complexes* de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ sont donc les fonctions de la forme suivante :

$$t \mapsto \lambda \exp\Big(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} t\Big) + \mu \exp\Big(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} t\Big)$$

où λ et μ sont des complexes arbitraires. Mais nous savons aussi que les solutions *à valeurs réelles* de cette même équation sont les fonctions de la forme suivante :

$$t \mapsto \alpha e^{-t/2} \sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} t\Big) + \beta e^{-t/2} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} t\Big) = \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$$

où α et β sont deux réels arbitraires ; une autre façon de le dire est que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est le plan vectoriel engendré par f_2 et f_3 : donc (f_2, f_3) est une base de cet ensemble.

21. – Il nous suffit de trouver une solution particulière de cette équation différentielle. Le second membre est une « exponentielle polynôme », et le coefficient de t dans l'exponentielle (soit 1) n'est pas solution de l'équation caractéristique ; la théorie nous dit de chercher une solution h de la forme $t \mapsto \mu e^t$; alors $h = h' = h''$, donc $h'' + h' + h$ est la fonction $t \mapsto 3\mu e^t$, et il est clair qu'il suffit de prendre $\mu = \lambda/3$. Donc les solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \alpha e^{-t/2} \sin\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) + \beta e^{-t/2} \cos\Big(\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big) + \frac{\lambda}{3} e^t$$

22. – Des questions **18** et **19**, nous déduisons qu'il existe un réel λ tel que $g = \lambda f_1$. Ainsi, de par la définition de g, la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$. Le résultat de la question **21** nous permet d'affirmer l'existence de réels α et β tels que $f = \dfrac{\lambda}{3} f_1 + \alpha f_2 + \beta f_3$: ceci montre bien l'appartenance de f à G.

FIN