CONCOURS COMMUN SUP 2004
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Proposition de Correction

CORRIGE DU PROBLEME D'ANALYSE

PREMIERE PARTIE

1. $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1+(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1-x)}$

Donc la fonction A définie par : $A(x) = \dfrac{1}{1-x} - \ln(1-x)$ est une primitive de a sur I

2. (E) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. Sa solution générale sur I est :

$y(x) = Ke^{A(x)} = K\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)}$ où K désigne un réel quelconque

3. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et f(x) = e $(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))e^{x+x^2+x^3+o(x^3)}$

D'où , après développements et réductions d'usage : $f(x) = e(1 + 2x + \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{34}{6}x^3 + o(x^3))$

DEUXIEME PARTIE

4. Soit, pour tout entier naturel n, l'assertion A(n) : ‘’ Il existe un polynôme P_n tel que :

$f^{(n)}(x) = P_n(\dfrac{1}{1-x})e^{\frac{1}{1-x}}$ pour tout réel x appartenant à I ‘’

.) A(0) est vraie avec $P_o(X) = X$

.) Prouvons que pour tout entier naturel n, A(n) implique A(n+1) :

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{1-x})e^{\frac{1}{1-x}} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = P_n'(\frac{1}{1-x})(\frac{1}{1-x})'e^{\frac{1}{1-x}} + P_n(\frac{1}{1-x})e^{\frac{1}{1-x}}(\frac{1}{1-x})'$$

$$= (P_n'(\frac{1}{1-x}) + P_n(\frac{1}{1-x}))\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 e^{\frac{1}{1-x}}$$

Posons : $P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) + P_n'(X))$ (*)

P_{n+1} est un polynôme tel que : $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\dfrac{1}{1-x})e^{\frac{1}{1-x}}$

5. On applique la formule (*) successivement pour n = 0, 1, 2, 3 :

$P_o(X) = X$ $P_1(X) = X^3 + X^2$ $P_2(X) = X^5 + 4X^4 + 2X^3$ et $P_3(X) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$

6. Soit (E) : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$

On dérive n fois les deux membres de (e) en appliquant la formule de Leibniz :

$$\left((1-x)^2 y'\right)^{(n)} = (1-x)^2)y^{(n+1)} - 2(1-x)ny^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)}$$

$$((2-x)y)^{(n)} = (2-x)y^{(n)} - ny^{(n-1)}$$

Après avoir égalisé et utilisé la définition des polynômes P_n , on obtient :

$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2]\, P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$

TROISIEME PARTIE

7. Le résultat de la question 6 donne directement : $a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2 a_{n-1}$ car $a_n = f^{(n)}(0) = e.P_n(1)$

8.
a) Ces nombres sont donnés par les coefficients du développement limité de f(x) (question 3)

$a_0 = e$ $a_1 = 2e$ $a_2 = 7e$ $a_3 = 34e$ et $a_4 = 209e$

b) D'après la formule de Taylor-Young : $f(x) = e(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{34}{6}x^3 + \frac{209}{24}x^4 + o(x^4))$

9 . On peut appliquer l'inégalité de Taylor- Lagrange à l'ordre p à la fonction exponentielle sur l'intervalle [0, 1] :

$$\left| e - \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} \right| \leq \frac{e}{(p+1)!}$$

10.
a) $S_p(0) = u_p$

et $S_p(1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i+1}{i!} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i-1)!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p + u_{p-1}$

b) les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent respectivement vers e et 2e

11.

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{(i!)^2} X_i \quad (*)$$

avec : $X_i = (n+1+i)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n-1+i)! = (n+i-1)![-(n+i)+i^2] = -(n+i)! + (n+i-1)!i^2$

Donc le premier membre de (*) peut s'écrire :

$$-\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2} = -S_p(n) + S_{p-1}(n)$$

12. On démontre ce résultat par récurrence double sur n :
Nous savons que les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent
D'après la formule précédente, si les suites $p \to S_p(n-1)$ et $p \to S_p(n)$ convergent ,alors la suite $p \to S_p(n+1)$ converge également.

13. Si, pour tout n, on désigne par b_n la limite de la suite $p \to S_p(n)$, le même raisonnement par récurrence prouve que $b_n = a_n$

CORRIGE DU PROBLEME D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

PREMIERE PARTIE

1. f ($\vec{u}$) = $\vec{u}$ et si $\vec{t} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ alors $f(\vec{t}) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}$

Si $\vec{t}$ appartient au plan d'équation x + y + z = 0, il en est de même de $f(\vec{t})$

2.

a) Q est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $\vec{u}$; $\vec{v}$ en fait partie car $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ et $\vec{w}$ également par définition. De plus $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires donc ($\vec{v}$, $\vec{w}$) est une base de Q.

b) ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) est une base orthogonale directe de $\vec{E}$ mais pas normée car $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$

c) Précisons d'abord : $\vec{w} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{j} - \vec{k})$.

Alors f($\vec{v}$) $= -\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{w}$ et $f(\vec{w}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$ d'où $\theta = \frac{4\pi}{3}\quad [2\pi]$

d) La restriction de f à Q (orienté par la base ($\vec{v}$, $\vec{w}$)) est la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$

DEUXIEME PARTIE

3.

a) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix}$ et $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{bmatrix}$ donc P = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}$

b) En utilisant le fait que : $j^2 = \overline{j}$, $j^3 = 1$ *et* $1 + j + j^2 = 0$ on obtient : $P.\overline{P}$ = 3I ce qui prouve que P est inversible et que : $P^{-1} = \frac{1}{3}\overline{P}$

4.

a) $JX_1 = X_1$ $JX_2 = \begin{bmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{bmatrix} = jX_2$ de même $JX_3 = j^2 X_3$

a) D'où : JP = $\begin{bmatrix} X_1 & jX_2 & j^2X_3 \end{bmatrix}$ = P $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{bmatrix}$ donc $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{bmatrix}$

5.

a) Les matrices qui commutent avec J sont les matrices invariantes par permutations circulaires sur les lignes et les colonnes. On obtient rapidement les matrices M de la forme M = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$

Or : $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Donc M s'écrit : $M = aI + bJ + cJ^2$. Ainsi $C(J) = \text{Vect}(I, J, J^2)$

b) On vérifie que (I, J, J^2) est une famille libre donc est une base de C(J) qui est par conséquent de dimension 3.

6.

a) $D(a, b, c) = P^{-1}(aI + bJ + cJ^2)P = aI + b(P^{-1}JP) + c(P^{-1}J^2P) = aI + b\Delta + c\Delta^2$.

$$= \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{bmatrix}$$

b) En appliquant la règle de Sarrus, par exemple, on obtient : $\text{dét}(M(a, b, c)) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

D'autre part : $\text{dét}(D(a, b, c)) = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$

c) Or $\text{dét}(D(a, b, c)) = \text{dét}(P^{-1})\,\text{dét}(M(a, b, c))\text{dét}(P) = \text{dét}(M(a, b, c))$

d) M(a, b, c) est singulière si seulement si :

.) $a + b + c = 0$ ce qui signifie que O est le centre de gravité de (T)

ou .) $a + bj + cj^2 = 0$ ce qui équivaut à : $\dfrac{a-c}{c-b} = j$ donc que (T) est équilatéral

ou .) $a + bj^2 + cj = 0$ ce qui conduit à la même conclusion.

TROISIEME PARTIE

7. Les données se traduisent par l'égalité matricielle : $Y_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} Y_n$

Soit : $Y_{n+1} = M(0, \lambda, 1-\lambda)Y_n$.

Donc : $Z_{n+1} = P^{-1}M(0, \lambda, 1-\lambda)PZ_n = D(0, \lambda, 1-\lambda)\,Z_n$

8. $(D(0, \lambda, 1-\lambda))^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda j + (1-\lambda)\,j^2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda j^2 + (1-\lambda)\,j)^n \end{bmatrix}$

9.

a) La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = (\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n$ converge seulement dans les deux cas :

.) $(\lambda j + (1-\lambda)j^2 = 1$ ce qui est impossible ici car λ est réel

.) $|(\lambda j + (1-\lambda)j^2| < 1$. Cette inégalité est équivalente à $\lambda(\lambda - 1) < 0$ soit $\lambda \in]0, 1[$

c) Les suites (a_n), (b_n), (c_n) sont des combinaisons linéaires des suites (u_n) et de sa conjuguée donc elles convergent.

10.

a) $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

b) Désignons par x, y, z les limites respectives des suites (a_n), (b_n) et (c_n) .

Nous avons alors les égalités : $\begin{array}{l} x = \lambda y + (1-\lambda)z \\ y = (1-\lambda)x + \lambda z \\ z = \lambda y + (1-\lambda)y \end{array}$

La résolution de ce système conduit à $x = y = z$

c) D'autre part , d'après la question a) : $x + y + z = a + b + c$

On en conclut que : $x = y = z = \dfrac{a+b+c}{3}$

Autrement dit les sommets des triangles (T_n) convergent vers le centre de gravité du triangle (T)