PROBLÈME D' ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

A - *Etude de l'intersection de deux plans mobiles et d'un plan fixe:* **14 points au total**

A - 1) 3 points (1 pour $\overrightarrow{n_m}$, 1 pour un point et un vecteur directeur de D, 1 pour l'inclusion de D dans P_m)

On sait que le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ est normal au plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ donc P_m admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_m}(1,m,-m)$.

De plus, on a

$$M(x,y,z)\in D \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=z \\ x=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+z\times 0 \\ y=0+z\times 1 \\ z=0+z\times 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow M = A + z\overrightarrow{b}$$

où $A(1,0,0)$ et $\overrightarrow{b}(0,1,1)$. On voit ainsi que D est la droite passant par $A(1,0,0)$ et dirigée par $\overrightarrow{b}(0,1,1)$.

On voit clairement que si $x=1$ et $y=z$, alors $x+my-mz = x+m(y-z)=1$, ce qui prouve bien que la droite D est incluse dans chaque plan P_m.

A - 2) 3 points (1 pour $\overrightarrow{r_m}$, 1 pour D' non orthogonale à P_m, 1 pour une équation cartésienne de R_m)

On a

$$\overrightarrow{n_m}\wedge\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1\\ m\\ -m\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m\\ -1-m\\ 1-m\end{pmatrix}$$

soit $\overrightarrow{r_m} = (2m,-1-m,1-m)$.

Puisqu'on ne peut avoir à la fois $2m=0$ et $1-m=0$, le vecteur $\overrightarrow{r_m}$ est non nul (pour tout m) ce qui signifie que $\overrightarrow{n_m}$ et $\overrightarrow{a}$ ne sont pas colinéaires et donc que la droite D' n'est pas orthogonale au plan P_m.

Puisque R_m contient D' et est orthogonal à P_m, R_m est donc dirigé par $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{n}$. Il admet donc $\overrightarrow{r_m}$ pour vecteur normal.

De plus, puisque D' (et donc R_m) contient l'origine O, on a donc R_m d'équation $2mx-(1+m)y+(1-m)z=0$.

A - 3) 2 points

Les coordonnées (x,y,z) de I_m vérifient donc

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 0\\ x & + & my & - & mz & = & 1\\ 2mx & - & (m+1)y & + & (1-m)z & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & -z\\ x & = & 1+2mz\\ 2m(1+2mz)+(m+1)z+(1-m)z & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & -z\\ x & = & 1+2mz\\ \left(4m^2+2\right)z & = & -2m\end{array}\right.$$

Or, $4m^2+2\geq 2>0$. On en déduit donc $z=-\dfrac{m}{1+2m^2}$ puis $y=\dfrac{m}{1+2m^2}$ et $x=1+2mz=\dfrac{1}{1+2m^2}$.

On a donc $I_m\left(\dfrac{1}{1+2m^2},\dfrac{m}{1+2m^2},-\dfrac{m}{1+2m^2}\right)$.

A - 4) 1 point

(S) a pour équation $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, donc (S) est la sphère centrée en $\Omega\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$ de rayon $\dfrac{1}{2}$.

A - 5) 2 points (1 pour l'appartenance de I_m à (S), 1 pour le centre et le rayon du cercle)

On a bien $\left(\frac{1}{1+2m^2}\right)^2+\left(\frac{m}{1+2m^2}\right)^2+\left(-\frac{m}{1+2m^2}\right)^2 = \frac{1}{(1+2m^2)^2}+2\frac{m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{1+2m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{1}{1+2m^2} = x$

donc I_m appartient bien à (S). On sait aussi par sa définition que I_m est dans le plan Q donc I_m appartient à $(S)\cap Q$.

Il se trouve que $\Omega\in Q$ et donc $I_m\in(S)\cap Q$ qui est un cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

A - 6) 3 points (2 pour F, 1 pour la réunion des plans P_m)

Posons $M(x_0, y_0, z_0)$ et cherchons combien de plans P_m contiennent M. On a

$$M \in P_m \Longleftrightarrow x_0 + my_0 - mz_0 = 1 \Longleftrightarrow m(y_0 - z_0) = 1 - x_0$$

On voit donc que si $y_0 - z_0 \neq 0$, alors seul le plan $P_{\frac{1-x_0}{y_0-z_0}}$ passe par M.

Si $y_0 - z_0 = 0$, alors on a $M \in P_m \Longleftrightarrow m \times 0 = 1 - x_0 \Longleftrightarrow x_0 = 1$. On retrouve ici le fait que tous les plans P_m contiennent la droite D.

L'ensemble F demandé est donc l'espace $\mathcal{E}$ privé du plan d'équation $y = z$.

La réunion des plans P_m est l'ensemble des points de l'espace par lesquels passe **au moins** un plan P_m.

D'après ce qui précède, la réunion des plans P_m est donc la réunion de F et de la droite D.

B - *Etude d'un exemple d'application f*: $\boxed{\textbf{16 points au total}}$

B - 1) 2 points

On a $f\left(\overrightarrow{X}\right) = 3\left(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{X} + \overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{w}$ d'où, si $\overrightarrow{X} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$:

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{X}\right) &= 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\overrightarrow{u} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y-z \\ -5z-x \\ x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y+2z \\ 2x-2z \\ 4x+8y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $f(x,y,z) = (4y+2z, 2x-2z, 4x+8y)$.

B - 2) 2 points (1 pour base et dimension du noyau de f, 1 pour f non automorphisme)

$$\begin{aligned} \textit{On a } f(x,y,z) = \overrightarrow{0} &\Longleftrightarrow (4y+2z, 2x-2z, 4x+8y) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2y+z=0 \\ x-z=0 \\ x+2y=0 \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow x = z = -2y \Longleftrightarrow (x,y,z) = (-2y, y, -2y) = y(-2,1,-2) \end{aligned}$$

On a donc $Ker(f) = \{y(-2,1,-2) / y \in \mathbb{R}\} = Vect\left(\overrightarrow{K} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\right)$.

Puisque $\overrightarrow{K} \neq \overrightarrow{0}$, le noyau de f est donc de dimension 1 et admet $\left(\overrightarrow{K} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\right)$ pour base.

Comme le noyau de f ne contient pas que $\overrightarrow{0}$, f n'est pas injective et donc f n'est pas un automorphisme de E.

B - 3) 3 points (2 pour l'énoncé du théorème, 1 pour le rang de f)

Le théorème du rang s'énonce ainsi:

> *Si une application f est linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie dans un espace vectoriel F, alors le noyau et l'image de f sont de dimension finie et on a*
> $$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

On a donc ici $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$ soit $rg(f) = 2$.

B - 4) 2 points

$$\begin{aligned} \textit{On a } \mathrm{Im}(\varphi) &= \{\varphi(\overrightarrow{x}) / \overrightarrow{x} \in G\} = \left\{\varphi(\lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \lambda_3\overrightarrow{e_3}) / (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \textit{ puisque } G = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ &= \left\{\lambda_1\varphi(\overrightarrow{e_1}) + \lambda_2\varphi(\overrightarrow{e_2}) + \lambda_3\varphi(\overrightarrow{e_3}) / (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \textit{ puisque } \varphi \textit{ est linéaire} \end{aligned}$$

On aboutit ainsi à l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2})$ et $\varphi(\overrightarrow{e_3})$ soit $\mathrm{Im}(\varphi) = Vect(\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \varphi(\overrightarrow{e_3}))$.

B - 5) 2 points

On sait que $f\left(\overrightarrow{i}\right) = f(1,0,0) = (0,2,4)$ et que $f\left(\overrightarrow{j}\right) = f(0,1,0) = (4,0,8)$ sont, par définition, dans l'image de f. De plus, ils ne sont pas colinéaires et donc ils forment une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$. On a donc deux vecteurs formant une famille libre d'un espace de dimension 2, on sait donc qu'ils forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.

B - 6) 3 points (1 pour B' base, 2 pour l'obtention de A')

On a $f\left(f\left(\overrightarrow{i}\right)\right) = f(0,2,4) = (16,-8,16)$ et donc

$$\det_B\left(f\left(f\left(\overrightarrow{i}\right)\right), f\left(\overrightarrow{i}\right), \overrightarrow{i}\right) = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = -32-32 = -64 \neq 0$$

ce qui assure que $\underline{\underline{B' = \left(f\left(f\left(\overrightarrow{i}\right)\right), f\left(\overrightarrow{i}\right), \overrightarrow{i}\right) \text{ est une base de } E}}$.

Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a $\underline{\underline{Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$ puisque

$$f\left(f\left(f\left(\overrightarrow{i}\right)\right)\right) = f(16,-8,16) = 8f(2,-1,2) = 8f\left(-\overrightarrow{K}\right) = \overrightarrow{0}.$$

B - 7) 2 points (1 pour le choix de P, 1 pour le lien entre A et A')

Puisque $\overrightarrow{i} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} = 0f\left(f\left(\overrightarrow{i}\right)\right) + 0f\left(\overrightarrow{i}\right) + 1\overrightarrow{i}$, on voit, en regardant la troisième colonne de P_1 et la troisième colonne de P_2 que $\underline{\underline{P \text{ est nécessairement la matrice } P_2}}$.

La relation matricielle demandée est $\underline{\underline{A = P^{-1}A'P}}$ ou encore $\underline{\underline{A' = PAP^{-1}}}$.

C - *Etude d'un deuxième exemple:* $\boxed{\textbf{11 points au total}}$

C - 1) 3 points

Posons, pour tout entier naturel n, $P(n)$ l'assertion suivante: "$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$".

- au rang $n=0$, on sait que, par convention, $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien de la forme souhaitée si on pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
- si, à un rang $n \geq 0$, on suppose que M^n est de la forme $\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ avec a_n et b_n réels, alors on a

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n & -3a_n - b_n \\ -3a_n - b_n & -3a_n - b_n & 2a_n - 6b_n \end{pmatrix}$$

Si on pose $a_{n+1} = 2a_n - 6b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n - b_n$, alors ce sont bien deux réels et on a bien $M^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$.

Puisque la propriété P est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, alors elle est vraie à tout rang $n \geq 0$, ce qui achève la récurrence.

C - 2) 2 points

On a en effet pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n &= (-3a_{n+1} - b_{n+1}) - b_{n+1} - 20b_n = -3a_{n+1} - 2b_{n+1} - 20b_n \\ &= -3(2a_n - 6b_n) - 2(-3a_n - b_n) - 20b_n = 0 \end{aligned}$$

C - 3) 3 points (1 pour la forme de b_n, 1 pour sa valeur, 1 pour la valeur de a_n)

La suite b vérifie une relation de récurrence linéaire du second ordre dont l'équation caractéristique $r^2 - r - 20$ a pour racines -4 et 5. On sait donc que $\underline{\underline{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \lambda(-4)^n + \mu 5^n}}$.

Or, on a $b_0 = 0$ et $b_1 = -3$ d'où $\lambda + \mu = 0$ et $5\mu - 4\lambda = -3 = 9\mu$. On en tire $\lambda = \dfrac{1}{3} = -\mu$ d'où $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \dfrac{1}{3}\left((-4)^n - 5^n\right)}}$.

Puisque $b_{n+1} = -3a_n - b_n$ on a $a_n = -\dfrac{1}{3}(b_{n+1} + b_n)$ ce qui mène à $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{3}\left((-4)^n + 2 \times 5^n\right)}}$.

C - 4) 3 points (1 pour $M^2 = M + 20I_3$, 2 pour l'inversibilité de M et l'écriture de M^{-1})

On obtient que $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & -3 & -3 \\ -3 & 22 & -3 \\ -3 & -3 & 22 \end{pmatrix} = M + 20I_3$. $\underline{\underline{M^2 \text{ est donc bien combinaison linéaire de } M \text{ et de } I_3}}$.

On a donc $M(M - I_3) = 20I_3$ soit encore $M \times \dfrac{1}{20}(M - I_3) = I_3$ ce qui permet de dire que $\underline{\underline{M \text{ est inversible}}}$ et que $M^{-1} = \dfrac{1}{20}(M - I_3)$ soit $\underline{\underline{M^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}}}$.

D - *Etude d'un troisième cas:* 9 points au total

D - 1) 3 points (2 pour la première partie de la question, 1 pour la réciproque)

On sait déjà que g est linéaire. Dans ce cas, g est projecteur si, et seulement si, $g \circ g = g$ ce qui équivaut à $\forall \overrightarrow{x} \in E, g(g(\overrightarrow{x})) = g(\overrightarrow{x})$. Or, on a

$$g(g(\overrightarrow{x})) = g(\alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}) = \alpha((\alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} = \alpha^2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}$$

Puisque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ et $\alpha \neq 0$, on a alors

$$\alpha^2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}$$

Il est clair ici que si $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = 1$, alors l'égalité précédente est valable et donc g est bien un projecteur.
Réciproquement, si g est un projecteur, on a alors $\forall \overrightarrow{x} \in E, \alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})$.

Si on applique cette relation à $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u}$, on obtient que $\alpha \|\overrightarrow{u}\|^2(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|^2$. Or $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et donc $\|\overrightarrow{u}\|^2 \neq 0$.

On a donc bien alors $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = 1$.

D - 2) 3 points (2 pour F_1 et F_2 supplémentaires dans E, 1 pour la base et la direction de la projection g)

On a clairement $F_1 + F_2 \subset E$.

De plus, si $\overrightarrow{x} \in E$, on a $\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x} - g(\overrightarrow{x})) + g(\overrightarrow{x})$ avec

- $g(\overrightarrow{x}) = \alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} \in F_2$;
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{x} - g(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} - \overrightarrow{u} \cdot (\alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} - (\alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}))(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} = 0$ ce qui signifie que $\overrightarrow{x} - g(\overrightarrow{x}) \in F_1$.

On a ainsi prouvé que tout vecteur de E peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F_1 avec un vecteur de F_2, ce qui signifie que $E \subset F_1 + F_2$.

Il nous reste donc à prouver que la somme $F_1 + F_2$ est directe, ce qui revient à $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Or, si $\overrightarrow{x} \in F_1 \cap F_2$, $\overrightarrow{x}$ est de la forme $\lambda\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} = 0$ ce qui donne $\lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Or, puisque $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = 1$, on ne peut avoir $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. On a donc $\lambda = 0$ d'où $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Il est clair qu'à l'inverse, on a bien $\overrightarrow{0}$ dans $F_1 \cap F_2$.

Au final, $\underline{\underline{F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont bien supplémentaires dans } E}}$.

Puisque la composante de $\overrightarrow{x}$ sur F_2 précédemment donnée est $g(\overrightarrow{x})$, alors $\underline{\underline{g \text{ est la projection sur } F_2 \text{ parallèlement à } F_1}}$.

D - 3) 3 points

Si on note q la projection sur D parallèlement à P, on a $q(\overrightarrow{x}) = \alpha(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}$ avec $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = 1$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} - 5\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. On obtient alors que $q(x, y, z) = -\dfrac{1}{3}(x + y + z)\overrightarrow{v}$ et finalement que

$$Mat_B(q) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $p + q = Id$, on a $Mat_B(p) = I_3 - Mat_B(q)$ soit

$$\underline{\underline{Mat_B(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}}$$

PROBLÈME D' ANALYSE

A - Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon: $\boxed{\textbf{7 points au total}}$

A - 1) 1 point

Puisque $\ln(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$, f est définie sur $[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[= D$.

A - 2) 1 point

On a, pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{\ln(x)} \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

A - 3) 2 points

Par théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $]0;1[$. On vient d'obtenir que f est dérivable en 0, il reste donc à vérifier que f' est continue en 0, ie que $f'(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} f'(0) = 0$. Or, on a

$$\forall x \in \,]0;1[\,, f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln^2(x)} = \frac{1}{\ln(x)} \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$$

Ainsi, f est bien de classe C^1 sur $[0;1[$.

A - 4) 3 points (2 pour les variations, 1 pour le reste)

f est dérivable sur $\Delta =]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$ et on a $\forall x \in \Delta, f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$.

On a donc $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln(x) > 1 \Longleftrightarrow x > e$.

Ainsi, f est décroissante sur $]0;1[$, sur $]1;e[$ et est croissante sur $]e;+\infty[$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(e) & = & e \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) & = & f(0) = 0 \textit{ puisque } f \textit{ est continue en } 0 \textit{ (car dérivable en } 0) \\ f(x) & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x \longrightarrow 1^-}{\longrightarrow} -\infty \textit{ puisque } \ln(x) \underset{x \longrightarrow 1^-}{\longrightarrow} 0^- \\ f(x) & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x \longrightarrow 1^+}{\longrightarrow} +\infty \textit{ puisque } \ln(x) \underset{x \longrightarrow 1^+}{\longrightarrow} 0^+ \\ f(x) & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty \textit{ par croissances comparées} \end{array}$$

D'où le tableau suivant

x	0			1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

B - Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et par $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$: $\boxed{\textbf{14 points au total}}$

B - 1) 2 points

Posons $P(n)$ l'assertion: "$v_n \geq e$". Alors:

- au rang $n = 0$, on a bien $v_0 \geq e$ puisque $e \simeq 2.718$ à 10^{-3} près.
- si, à un rang $n \geq 0$, on a $v_n \geq e$, alors, puisque f est croissante sur $[e;+\infty[$, on a $f(v_n) \geq f(e)$ soit $v_{n+1} \geq e$.

Puisque la propriété P est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, on sait donc qu'elle est vraie à tout rang $n \geq 0$, ie $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.

B - 2) 4 points (2 pour la convergence, 1 pour l'obtention de $\ell = f(\ell)$, 1 pour la valeur de ℓ)

On a, pour tout entier naturel n : $v_n \geq e$ d'où $\ln(v_n) \geq 1$ puis $0 < \dfrac{1}{\ln(v_n)} \leq 1$ et enfin $\dfrac{v_n}{\ln(v_n)} \leq v_n$, ce qui assure que la suite v est décroissante. Comme elle est de plus minorée par e, on sait alors qu'elle converge vers une limite $\ell \geq e$.

Puisque f est continue sur $[e; +\infty[$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$, on a, par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $\ell = \dfrac{\ell}{\ln(\ell)}$ soit $\ell \ln(\ell) = \ell$ donc $\ell(\ln(\ell) - 1) = 0$ soit $\ell = 0$ ou $\ell = e$. On a donc $\ell = e$ puisqu'on sait que $\ell \geq e$.

Au final, la suite v converge vers e.

B - 3) 2 points

On sait déjà que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x)$. De plus

$$f'(x) \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 4\ln(x) - 4 \leq \ln^2(x) \Longleftrightarrow \ln^2(x) - 4\ln(x) + 4 \geq 0 \Longleftrightarrow (\ln(x) - 2)^2 \geq 0$$

ce qui est vrai et donc on a $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

B - 4) 2 points (pour l'une des deux versions de ce théorème)

Soit une fonction f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, $(a < b)$, alors:

version 1: s'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$, on a alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

version 2: s'il existe un réel A tel que $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq A$, on a alors $|f(b) - f(a)| \leq A|b - a|$.

B - 5) 3 points

La fonction f est continue sur D et donc elle l'est sur $[e, v_n] \subset]1; +\infty[$. Elle est aussi dérivable sur D donc sur $]e; v_n[$.

On sait enfin que $\forall x \in]e; v_n[, |f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$. Par application de l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e| \textit{ soit en fait } \forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|$$

Posons alors $P(n)$: " $|v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$".

- au rang $n = 0$, on a bien $|v_0 - e| = |3 - e| = 3 - e \leq 3 - 2 = 1 = \dfrac{1}{4^0}$ donc la propriété P est vraie au rang 0.
- Supposons que l'on ait $|v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$ vraie à un rang $n \geq 0$. Alors, on sait que $|v_{n+1} - e| \leq \dfrac{1}{4}|v_n - e|$ et donc $|v_{n+1} - e| \leq \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^{n+1}}$. La propriété P est donc héréditaire à partir du rang 0.

On a donc prouvé par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

B - 6) 1 point

v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près si $|v_n - e| \leq 10^{-12}$. Or, puisque $4^5 > 1000$, on a $\dfrac{1}{4^5} < 10^{-3}$ et donc $\left(\dfrac{1}{4^5}\right)^4 = \dfrac{1}{4^{20}} < (10^{-3})^4 = 10^{-12}$. De plus, pour $n \geq 20$, on a $4^n \geq 4^{20}$ et donc finalement, pour $n \geq 20$, on a $|v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n} \leq \dfrac{1}{4^{20}} \leq 10^{-12}$ ce qui signifie qu'à partir du rang $n_1 = 20$, v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Etude de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$: $\boxed{\text{7 points au total}}$

C - 1) 3 points

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a pour $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2x(1 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2 - 4x^2}{x(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x^2)^2}{x(1 + x^2)^2} \geq 0$$

Ainsi, h est croissante sur $]0; +\infty[$. Or, on a $h(1) = 0$ donc h est négative sur $]0; 1[$ et est positive sur $]1; +\infty[$. Puisque g' et h ont même signe, g est décroissante sur $]0; 1[$ et est croissante sur $]1; +\infty[$.

C - 2) 2 points

Posons $x=1+h$, ainsi $g(x)=\dfrac{(1+h)^2-1}{(1+h)\ln(1+h)}=\dfrac{2h+h^2}{(1+h)\ln(1+h)}\underset{h\to 0}{\sim}\dfrac{2h}{1\times h}=2$. Ainsi, $\underline{\underline{g(x)\underset{x\longrightarrow 1}{\longrightarrow}2}}$.

C - 3) 2 points (1 pour la position relative de Γ_g par rapport à Γ_f, 1 pour l'aire)

On a $g(x)-f(x)=\dfrac{-1}{x\ln(x)}$ et donc $\underline{\underline{(\Gamma_g)\text{ se trouve au dessus de }(\Gamma_f)\text{ sur }]0;1[\text{ et en dessous de }(\Gamma_f)\text{ sur }]1;+\infty[}}$.
L'aire demandée vaut

$$\int_2^e (f(x)-g(x))\,dx=\int_2^e\frac{dx}{x\ln(x)}=\Big[\ln(|\ln(x)|)\Big]_2^e=\underline{\underline{-\ln(\ln(2))}}$$

D - Tracé d'une courbe paramétrée: 6 points au total

D - 1) 4 points (1 pour l'étude en 0, 1 pour l'étude en 1, 2 pour l'étude en $+\infty$)

On sait que $f(t)\underset{t\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow}0$ et on a $g(t)=\dfrac{t^2-1}{t\ln(t)}\underset{t\to 0^+}{\sim}\dfrac{-1}{t\ln(t)}\underset{t\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow}+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote à (Γ); (Γ) est à gauche de cette asymptote vu le signe de f sur $]0;1[$.

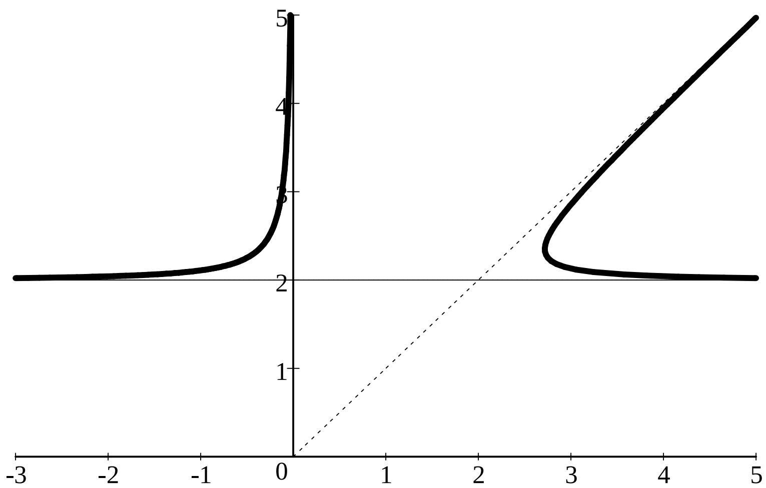
On sait que $f(t)\underset{t\longrightarrow 1}{\longrightarrow}\pm\infty$ et grâce à la question C)2), que $g(t)\underset{t\longrightarrow 1}{\longrightarrow}2$ donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote à (Γ); puisque g est minimale en 1, alors (Γ) est toujours au dessus de cette asymptote.

Enfin, on sait que $f(t)\underset{t\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et on a $g(t)=\dfrac{t^2-1}{t\ln(t)}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{t^2}{t\ln(t)}=\dfrac{t}{\ln(t)}=f(t)$, ie $\dfrac{y(t)}{x(t)}\underset{t\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow}1$.

Et on a $y(t)-x(t)=\dfrac{-1}{t\ln(t)}\underset{t\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow}0^-$. La droite d'équation $y=x$ est asymptote à (Γ) et (Γ) se trouve en dessous de cette asymptote lorsque $t>1$, d'après la question précédente.

D - 2) 2 points

Le vecteur vitesse à l'instant $t=e$ a pour coordonnées $(x'(e)=0, y'(e)>0)$. Puisque ce vecteur est non nul, il dirige la tangente qui est donc verticale. On obtient le graphe suivant:



E - Solutions d'une équation différentielle: 9 points au total

E - 1) 2 points

On a sur K, $z=\dfrac{1}{y}$ d'où $z'=-\dfrac{y'}{y^2}$. Le fait que z vérifie (E) débouche alors sur le fait que y vérifie $x^2y'(x)+xy(x)=1$.

E - 2) 5 points (1 pour les solutions de l'équation homogène (H_2), 2 pour une solution particulière, 1 pour se ramener à g_a, 1 pour le fait que g_a ne s'annule pas si $a>1$)

L'équation homogène (H_2) : $x^2y'(x)+xy(x)=0$ est équivalente à $y'(x)+\dfrac{1}{x}y(x)=0$ sur K et admet donc sur K pour solutions les fonctions y_H données par

$$y_H(x)=C\exp\left(-\int\frac{1}{x}dx\right)=C\exp(-\ln(x))=\frac{C}{x}$$

On cherche alors une solution particulière de $x^2y'(x)+xy(x)=1$ qui soit de la forme $y(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

On aboutit à $h'(x)=\dfrac{1}{x}$ et donc $h(x)=\ln(x)$ convient.

Les fonctions y solutions de (E_2) sur K sont donc de la forme $y(x)=\dfrac{C+\ln(x)}{x}$ avec C constante réelle quelconque.

Si on pose $a=e^C$, on a $C=\ln(a)$ et donc les solutions y de (E_2) vérifient $y(x)=\dfrac{\ln(a)+\ln(x)}{x}=\dfrac{\ln(ax)}{x}=g_a(x)$.

On a $g_a(x)=0\Longleftrightarrow \ln(ax)=0\Longleftrightarrow ax=1\Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{a}$. Or, pour $a>1$, $\dfrac{1}{a}<1$ et donc, dans ce cas, la fonction g_a ne peut pas s'annuler sur $]1;+\infty[$.

E - 3) 2 points

La courbe (Γ_g) d'une fonction g quelconque est l'image par l'homothétie de centre 0 de rapport λ de la courbe (Γ_f) d'une fonction f quelconque si cette homothétie h envoie tout point $M(x,f(x))$ de la courbe de f en un point de la courbe de g. Or, $h(M)$ est le point $N(\lambda x,\lambda f(x))$. Ce point sera donc sur la courbe de g si on a $\lambda f(x)=g(\lambda x)$.

En fait, ceci traduit seulement le fait que $h(\Gamma_f)\subset\Gamma_g$ mais l'inclusion inverse découle du fait que la relation $\lambda f(x)=g(\lambda x)$ donne, en posant $x'=\lambda x$, $\dfrac{1}{\lambda}g(x')=f\left(\dfrac{1}{\lambda}x'\right)$, ce qui signifie que $h^{-1}(\Gamma_g)\subset\Gamma_f$ d'où $\Gamma_g\subset h(\Gamma_f)$.

(on ne tiendra pas rigueur dans la notation de l'absence éventuelle de la preuve de cette inclusion inverse).

Or, ici on a $f_1(ax)=\dfrac{ax}{\ln(ax)}=af_a(x)$ donc C_1 est l'image de C_a par l'homothétie de centre O et de rapport a et donc C_a est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{a}$.

F - Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale: **7 points au total**

F - 1) 1 point

Puisque f est continue sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$, alors la fonction $x\longmapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $[0;x]\subset[0;1[\cup]1;+\infty[$, ie sur $[0;1[$ et donc H est définie sur $J=]0;1[$.

F - 2) 2 points

Puisque f est continue sur $[0;1[$, elle y admet une primitive F. On a alors, pour $x>0$

$$H(x)=\frac{1}{x}(F(x)-F(0))=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\underset{x\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow}F'(0)=f(0)=0$$

F - 3) 4 points (2 pour l'encadrement, 2 pour la limite de H en 1 à gauche)

On sait que $\ln(x)\underset{x\to 1}{\sim}(x-1)$ ce qui signifie que $\dfrac{\ln(x)}{x-1}\underset{x\longrightarrow 1}{\longrightarrow}1$ soit

$$\forall\varepsilon>0,\exists\nu>0,\forall x\in[1-\nu;1+\nu]\setminus\{1\},1-\varepsilon\leq\frac{\ln(x)}{x-1}\leq 1+\varepsilon$$

En prenant $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, on arrive au résultat avec $a=\max(1-\nu,0.5)$, par exemple.

On en déduit donc que $2\dfrac{t}{t-1}\leq f(t)\leq\dfrac{2}{3}\dfrac{t}{t-1}$ sur $[a;1[$. On a donc, par croissance de l'intégrale, pour x dans $[a;1[$,

$$\int_a^x 2\frac{t}{t-1}dt\leq\int_a^x f(t)\,dt\leq\int_a^x\frac{2}{3}\frac{t}{t-1}dt$$

Or, $\displaystyle\int_a^x\frac{t}{t-1}dt=\int_a^x\frac{t-1+1}{t-1}dt=\Big[t+\ln(|t-1|)\Big]_a^x=x-a+\ln\left(\frac{1-x}{1-a}\right)\underset{x\longrightarrow 1^-}{\longrightarrow}-\infty$.

On en déduit donc que $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\underset{x\longrightarrow 1^-}{\longrightarrow}-\infty$ et donc que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt+\int_a^x f(t)\,dt\underset{x\longrightarrow 1^-}{\longrightarrow}-\infty$.

Puisque $\dfrac{1}{x}\underset{x\longrightarrow 1}{\longrightarrow}1$, on a donc $H(x)\underset{x\longrightarrow 1^-}{\longrightarrow}-\infty$.