

**Épreuve de Mathématiques**  
(toutes filières)

**Jeudi 10 mai 2007 de 14h00 à 18h00**

### Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

**L'emploi d'une calculatrice est interdit**

### **PREMIER PROBLÈME**

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

#### **Partie A — Généralités**

1. Prouver que  $f$  et  $g$  sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $tf'(t) = g(t)$ .
2. Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté  $g$ ) est dérivable en 0.
3. Faire un tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$ , en faire un graphe sachant que  $e^{-1} \simeq 0,36$  à  $10^{-2}$  près.
4. Soit  $H$  la primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $t \mapsto g(1/t)$ , s'annulant en 1 :
  - 4.a. Calculer  $H$ .
  - 4.b. En former un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.
5. Soit  $n \geq 3$  un entier naturel. On introduit l'équation  $(E_n) : f(t) = t/n$ , d'inconnue  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - 5.a. En utilisant la question 3, montrer que  $(E_n)$  a une unique solution dans  $]0, 1[$ , que l'on notera  $\alpha_n$ . On montrerait identiquement (*mais ce n'est pas à faire*) que  $(E_n)$  admet une unique solution dans  $]1, +\infty[$ , que l'on notera  $\beta_n$ .
  - 5.b. Montrer que les suites  $(\alpha_n)_{n \geq 3}$  et  $(\beta_n)_{n \geq 3}$  sont monotones.
  - 5.c. Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite  $l > 0$  ? En déduire leurs limites.

## Partie B — Étude d'une courbe paramétrée

On étudie ici, dans un repère orthonormal d'origine  $O$ , la courbe paramétrée définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par le point  $M(t)$  de coordonnées

$$\text{données } \begin{cases} x(t) = f(t) = \frac{\exp(-1/t)}{t^2} \\ y(t) = g(t) = \frac{\exp(-1/t)}{t} \end{cases}$$

6. Déterminer les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $M(t)$  se situe sur la première bissectrice du plan d'équation cartésienne  $y = x$ .
7. Étudier la limite de la pente de la droite  $(OM(t))$  lorsque  $t$  tend vers  $0^+$  et  $+\infty$ .
8. En utilisant la question 3, faire un tableau de variation de  $x$  et  $y$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec limites aux bornes  $0^+$  et  $+\infty$ .
9. En utilisant les deux questions précédentes, tracer la courbe en repérant les tangentes verticales ou horizontales, on pourra utiliser que  $4e^{-2} \simeq 0,54$  à  $10^{-2}$  près.

## Partie C — Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant  $f$  à  $\mathbb{R}_+$  en posant  $f(0) = 0$ .

10. Montrer que l'application  $f$  ainsi prolongée est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ ; préciser  $f'(0)$  et montrer que l'égalité de la question 1 reste valable pour  $t = 0$ .
11. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on note :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

- 11.a. Justifier l'existence de ces intégrales que l'on ne cherchera surtout pas à calculer puis montrer que

$$F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x).$$

- 11.b. En séparant l'intégrale  $G(x)$  en deux, montrer qu'il existe une constante  $C$  réelle telle que pour tout  $x \geq 1$ ,

$$0 \leq G(x) \leq C + \ln(x).$$

- 11.c. En déduire que  $G(x)$  est négligeable devant  $x$  au voisinage de  $+\infty$  ainsi qu'un équivalent de  $F(x)$  au voisinage de  $+\infty$ .

12. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $(E) : x^2y' + y = x^2$ , l'expression générale de la solution fera apparaître la fonction  $F$ .

## Partie D — Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application  $y$  solution de  $(E) : x^2y' + y = x^2$  cette fois sur  $\mathbb{R}_+$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Nous allons, sans aucun calcul explicite de  $y$ , déterminer entièrement la suite des  $u_n = y^{(n)}(0)$  à partir de l'équation  $(E)$ .

13. Que vaut  $u_0 = y(0)$  ?
14. En dérivant  $(E)$ , calculer  $u_1 = y'(0)$  et  $u_2 = y''(0)$ .
15. Peut-on avoir  $y$  de la forme :  $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  ?
16. Soit  $n$  un entier naturel.

- 16.a. On suppose ici  $n \geq 3$ . Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+ :$

$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.$$

En déduire une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n-1}$ .

- 16.b. Donner une expression de  $u_n$  utilisant une factorielle, valable pour tout  $n \geq 2$ ; en déduire les développements limités (dont on justifiera l'existence) de  $y$  à tout ordre au voisinage de 0.

## DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel dont on notera  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points,  $E$  l'ensemble des vecteurs et  $\vec{0}$  le vecteur nul.  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , toutes les équations de l'énoncé seront relatives aux éléments de ce repère. Si  $M \in \mathcal{E}$  et  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  on pourra noter  $M = (x, y, z)$  et  $\vec{OM} = (x, y, z)$ .

On considère les ensembles  $P$  et  $Q$  d'équations cartésiennes :

$$P : x + z = 0, \quad Q : x + y + z - 3 = 0.$$

### Partie A — Étude d'un mouvement dans l'espace

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on introduit le point  $N(t)$  de  $\mathcal{E}$  caractérisé dans  $\mathcal{R}$  par les coordonnées

$$\begin{cases} a(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ b(t) = \sin(t) \\ c(t) = \frac{-\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1. Prouver que  $N(t)$  appartient au plan  $P$ .
2. Donner une équation paramétrique de la droite  $D$  intersection de  $P$  et  $Q$ . Est-il possible que  $N(t) \in D$  ?
3. Calculer  $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t)$ . En déduire que  $N(t)$  appartient à un cercle de  $P$  dont on précisera le centre et le rayon.
4. Calculer la distance de  $N(t)$  à la droite  $D$  puis au plan  $Q$ , on pourra vérifier que leur rapport est constant.
5. Prouver que pour tout  $t \in \mathbb{R} : \exp(it) + \exp(i(t + 2\pi/3)) + \exp(i(t - 2\pi/3)) = 0$ .
6. En déduire l'isobarycentre des points  $N(t), N(t + 2\pi/3), N(t - 2\pi/3)$ .

### Partie B — Construction d'un polynôme

On fixe maintenant  $t \in \mathbb{R}$  et on note

$$\begin{cases} s(t) = a(t) + b(t) + c(t) \\ d(t) = a(t)b(t) + a(t)c(t) + b(t)c(t) \\ p(t) = a(t)b(t)c(t) \end{cases} .$$

7. Simplifier  $s(t)$ .
8. Linéariser le produit de fonctions trigonométriques  $p(t)$ .
9. Calculer  $d(t)$  de deux manières différentes — on pourra utiliser un résultat de la question 3.
10. On considère maintenant le polynôme  $R(X) = (X - a(t))(X - b(t))(X - c(t))$ , dont les racines sont donc  $a(t), b(t)$  et  $c(t)$  :
  - 10.a. Dans cette question seulement  $t = \pi/2$ . Montrer *sans calculer*  $R(X)$  ni  $R'(X)$  que  $R'(0) = 0$ .
  - 10.b. Exprimer maintenant  $R(X)$  en fonction de  $s(t), d(t), p(t)$ , puis en fonction des résultats des questions précédentes.

### Partie C — Endomorphismes à noyau imposé

11. Montrer que  $P$  définit un plan vectoriel de  $E$ .
12. Est-ce le cas pour  $Q$  ? Préciser, sans preuve, la structure algébrique de  $Q$ .

13. On introduit les vecteurs :

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k}), \vec{j}' = \vec{j}, \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}).$$

Montrer que  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  est une base orthonormale de  $P$  et que  $\vec{k}'$  en est un vecteur normal. En déduire que  $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  est une base orthonormale de l'espace.

14. On désigne par  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . Soit  $\vec{e} \in E$ . Prouver, autrement que par « c'est du cours », que ses coordonnées dans la base  $B'$  sont données par :

$$\vec{e} = (\vec{e} \cdot \vec{i}') \vec{i}' + (\vec{e} \cdot \vec{j}') \vec{j}' + (\vec{e} \cdot \vec{k}') \vec{k}'$$

15. On considère ici une application linéaire  $u : E \rightarrow E$  telle que  $P \subset \ker(u)$ .

15.a. Prouver qu'il existe  $\vec{z} \in E$  tel que  $u(\vec{e}) = (\vec{e} \cdot \vec{k}') \vec{z}$  pour tout  $\vec{e} \in E$ .

15.b. Réciproquement, montrer qu'une application  $u$  donnée par la formule précédente est un endomorphisme de  $E$  tel que  $P \subset \ker(u)$ .

15.c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\vec{z}$  pour que  $P = \ker(u)$ . Donner dans ce cas le rang et l'image de  $u$ .

### Partie D — Matrices de projecteur

On note ici  $p : E \rightarrow E$  le projecteur orthogonal sur le plan  $P$ ,  $B$  la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  la base introduite à la question 13. On introduit les matrices :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier très rapidement que  $M'$  est la matrice de  $p$  dans la base  $B'$ .

17. Donner la matrice de passage  $P$  de la base  $B$  à la base  $B'$  ainsi que son inverse — on détaillera le raisonnement pour cette dernière.

18. Soit  $M$  la matrice de  $p$  dans la base  $B$  :

18.a. Justifier *sans calcul* que  $M^2 = M$ .

18.b. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(M + I)^n = I + (2^n - 1)M.$$

18.c. Exprimer  $M$  en fonction de  $P, P^{-1}$  et  $M'$ . Ensuite, calculer explicitement  $M$ .

19. On peut traiter cette partie sans avoir trouvé explicitement  $M$ . On introduit l'ensemble  $\mathcal{M}$  des matrices du type  $M_{a,b} = aM + bI$ , où  $a$  et  $b$  sont réels :

19.a. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{M}$  muni des lois usuelles sur les matrices a une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

19.b. Les réels  $a$  et  $b$  étant donnés, exprimer  $M_{a,b}$  en fonction de  $P, P^{-1}, I$  et  $M'$ . En déduire une forme factorisée du déterminant de  $M_{a,b}$  ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible.

19.c. Déterminer les réels  $e$  et  $f$  tels que  $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$ .

19.d. Lorsque  $M_{a,b}$  est inversible, exprimer son inverse sous la forme d'un élément de  $\mathcal{M}$ .

**FIN DE L'ÉPREUVE**