Auteur du Sujet : M. NICAISE
Lycée La Fayette - Clermont-Ferrand

Épreuve commune de mathématiques — Corrigé

PREMIER PROBLÈME

Partie A

1. Par les théorèmes usuels, f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Un calcul simple donne :

$$\forall t > 0, t f'(t) = t \times \frac{e^{-1/t}}{t^2} = g(t).$$

2. On a par croissance comparée $g(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ d'où un prolongement par continuité en posant $g(0) = 0$. Puis pour $t > 0$, encore par croissance comparée :

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{\exp(-1/t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0,$$

donc g dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

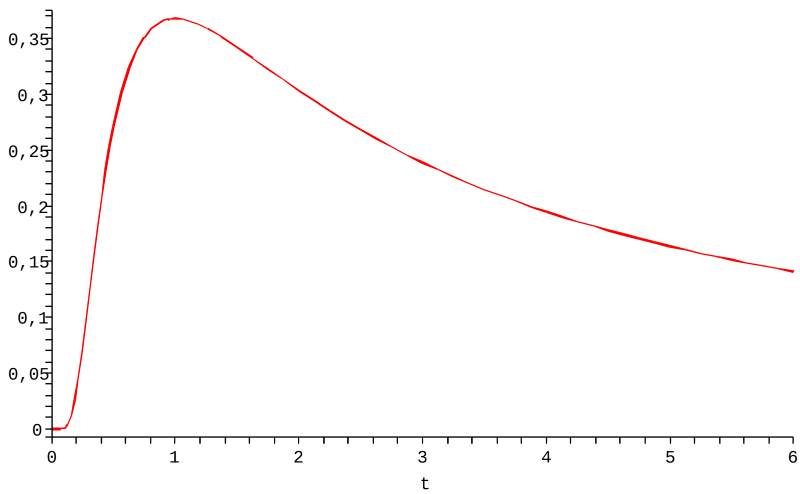
3. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et un calcul simple donne pour tout $t > 0$:

$$g'(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3}(1-t).$$

Les limites de g en 0^+ et $+\infty$ s'obtiennent par croissance comparée, d'où le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	0	$\oplus$	0	$\ominus$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

et le graphe :



4.a. On cherche donc à calculer $H : x \mapsto \int_1^x t e^{-t} dt$ définie au moins sur $\mathbb{R}_+^*$ car l'intégrande y est continue. Par une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(t) = -e^{-t}, u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t, v'(t) = 1 \end{cases},$$

licite car u et v sont C^1 on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$H(x) = [-te^{-t}]_1^x + \int_1^x e^{-t}dt = -(xe^{-x} - e^{-1}) + [-e^{-t}]_1^x \Rightarrow \underline{\underline{H(x) = -e^{-x}(x+1) + 2e^{-1}}}.$$

4.b. Soit x au voisinage de 1, on pose $x = 1+h$ alors

$$H(x) = -e^{-1}e^{-h}(2+h) + 2e^{-1} = -e^{-1}\left(1 - h + h^2/2 - h^3/6 + o(h^3)\right)(2+h) + 2e^{-1}$$

qui après les simplifications d'usage et retour à la variable x donne :

$$\underline{\underline{H(x) = e^{-1}(x-1) - \frac{e^{-1}}{6}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)}}.$$

5.a. Soit $t > 0$, on remarque en divisant par t que : $(E_n) \Leftrightarrow g(t) = 1/n$. Par la question **3** :

$*$ g est continue sur l'intervalle $]0,1[$,

$*$ g strictement croissante sur $]0,1[$ car dérivable et : $\forall t \in]0,1[, g'(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3}(1-t) > 0$.

Par le cours et le tableau de la question **3**, g établit une bijection de $]0,1[$ sur $]0,e^{-1}[$. Or $n \geq 3$ donc $n > e > 0$ donc $1/n \in]0,e^{-1}[$ donc il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $g(\alpha_n) = 1/n$, soit tel que $f(\alpha_n) = t/n$.

5.b. Soit $n \geq 3$. On a

$$g(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = g(\alpha_n).$$

Vu α_n et α_{n+1} dans $]0,1[$ où g croissante, on obtient $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ donc $(\alpha_n)_n$ décroissante. De même, on montre que $(\beta_n)_n$ croissante.

5.c. • Supposons par l'absurde que $\alpha_n \underset{n}{\rightarrow} l > 0$. Ayant pour tout $n \geq 3$ l'égalité $g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$, on obtient par passage à la limite (g est continue en l) que $g(l) = 0$, ce qui contredit $g > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est donc impossible. Un raisonnement analogue est valable pour la suite $(\beta_n)_n$.

• *Limite de* $(\alpha_n)_n$ *:* cette suite est donc décroissante, minorée par 0 par construction donc par le cours convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}_+$. Vu $l > 0$ impossible, on a $l = 0$ donc $\lim_n \alpha_n = 0$.

• *Limite de* $(\beta_n)_n$ *:* cette suite strictement positive est donc croissante et elle ne peut être majorée (sinon convergente vers une limite strictement positive), par le cours alors $\lim_n \beta_n = +\infty$.

Partie B

6. C'est le cas si et seulement si $f'(t) = g(t)$ donc par la question **1** ssi $t = 1$.

7. La pente cherchée vaut $p(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = t$, donc on a $p(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0, p(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

8. On calcule :

$$\underline{\underline{\forall t > 0, x'(t) = f''(t) = \frac{\exp(-1/t)}{t^4}(1-2t)}},$$

l'étude de $y = g$ est déjà connue par la question **3**, d'où le tableau :

t	0		1/2		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$\oplus$	0		$\ominus$		
$x(t)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$4e^{-2}$		$\searrow$		0
$y(t)$	$\Vert$ 0		$\nearrow$		e^{-1}	$\searrow$	0
$y'(t)$	$\Vert$		$\oplus$		0	$\ominus$	

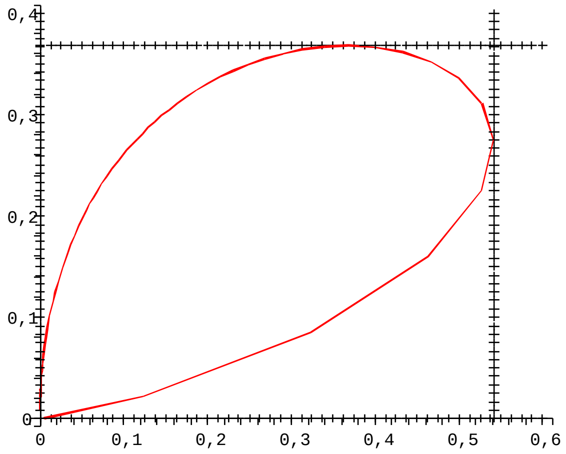


FIG. 1 – *Tangentes horizontales ou verticales marquées par des +*

9. On obtient le graphe ci-dessus, la question **7** permettant d'obtenir les tangentes à l'origine.

Partie C

10. On a :

$*$ f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes usuels et de plus $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 = f(0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$,

$*$ f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$,

$*$ $f'(t) = \exp(-1/t)/t^2 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ (limite finie).

Par le cours, $\underline{\underline{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}}$ et de plus $\underline{\underline{f'(0) = 0}}$.

11.a. • Ces intégrales sont définies comme intégrales de fonctions continues sur le segment $[0,x]$.

• On effectue maintenant une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(t) = f(t), u'(t) = f'(t) \\ v(t) = t, v'(t) = 1 \end{cases},$$

u et v sont bien C^1 sur $[0,x]$. Alors :

$$F(x) = xf(x) - \underbrace{0f(0)}_{=0} - \int_0^x \underbrace{tf'(t)}_{=g(t)}\,dt = \underline{\underline{xe^{-1/x} - G(x)}}.$$

11.b. Soit $x \geq 1$. Vu $0 \leq x$ et g positive, on a $\underline{\underline{G(x) \geq 0}}$. Posons maintenant $C = \int_0^1 g(t)dt$, alors en utilisant Chasles :

$$G(x) = \int_0^1 g(t)dt + \int_1^x \underbrace{g(t)}_{\leq 1/t}\,dt \leq C + \underbrace{\int_1^x \frac{dt}{t}}_{=\ln(x)} \Rightarrow \underline{\underline{G(x) \leq C + \ln(x)}}.$$

11.c. • Par les questions précédentes, si $x \geq 1$:

$$0 \leq \frac{G(x)}{x} \leq \frac{C}{x} + \frac{\ln(x)}{x}.$$

Le terme de droite tendant vers 0 lorsque $x \to +\infty$, par encadrements $G(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, autrement dit $\underline{\underline{G(x) = o_{+\infty}(x)}}$.

• Donc par la question **11.a**, on a :

$$\frac{F(x)}{x} = e^{-1/x} + \frac{o_{+\infty}(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1+0 = 1,$$

autrement dit $\underline{\underline{F(x) \sim x}}$ au voisinage de $+\infty$.

12. • *Equation homogène.* On a : $(x^2y' + y = 0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y(x) = C\exp(1/x), C \in \mathbb{R}}}$.

• *Solution particulière.* On la cherche sous la forme $y(x) = \lambda(x)\exp(1/x)$, λ étant supposée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$(E) \Leftrightarrow \lambda'(x) = \exp(-1/x) = f(x),$$

donc $\lambda(x) = F(x)$ convient. On accède ainsi à la solution particulière $\underline{\underline{y(x) = \exp(1/x)F(x)}}$.

• *Conclusion :* sur $\mathbb{R}_+^*$, $(E) \Leftrightarrow \underline{\underline{(y(x) = \exp(1/x)(C+F(x)), C \in \mathbb{R})}}$.

Partie D

13. Par le choix $x = 0$ dans (E), on obtient $\underline{\underline{u_0 = 0}}$.

14. • La dérivation (licite) de (E) donne une nouvelle équation : $x^2y'' + (2x+1)y' = 2x$. Par $x = 0$ alors $\underline{\underline{u_1 = 0}}$.

• En dérivant encore on obtient : $x^2y''' + (4x+1)y'' + 2y' = 2$. Par $x = 0$, $\underline{\underline{u_2 = 2}}$.

15. En supposant par l'absurde une telle forme pour y on obtient en utilisant les questions **13** et **14** que $y = (x \mapsto x^2)$, qui n'est pas solution de (E). Donc <u>une telle application ne peut être une solution de (E)</u>.

16.a. • (E) impliquant des fonctions C^∞, on peut la dériver n fois ; alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{d^n[x^2y'(x)]}{dx^n} + y^{(n)}(x) = \frac{d^n[x^2]}{dx^n} = 0 \ (\text{ car } n \geq 3\ ).$$

Par la formule de Leibniz,

$$\frac{d^n[x^2y'(x)]}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overbrace{\frac{d^k[x^2]}{dx^k}}^{=0 \text{ si } k\geq 3} (y')^{(n-k)}(x) = x^2y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x).$$

D'où, en regroupant : $\underline{\underline{x^2y^{(n+1)}(x) + (1+2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0}}$.

• Par les choix $x = 0$ on obtient finalement : $\underline{\underline{\forall n \geq 3, u_n = -n(n-1)u_{n-1}}}$.

16.b. • Nous allons faire une récurren ce. Pour $n \geq 2$ on pose $\mathscr{P}_n$: $\left[u_n = (-1)^n n((n-1)!)^2\right]$.

$*$ *Amorce :* on a $\mathscr{P}_2$ car il a été vu que $u_2 = 2$.

$*$ *Hérédité :* soit $n \geq 2$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. Par la question précédente et $\mathscr{P}_n$:

$$u_{n+1} = -(n+1)nu_n = (-1)^{n+1}(n+1)n^2((n-1)!)^2 = (-1)^{n+1}(n+1)(n!)^2.$$

D'où $\mathscr{P}_{n+1}$.

$*$ *Conclusion :* on établit ainsi par récurrence que : $\underline{\underline{\forall n \geq 2, u_n = (-1)^n n((n-1)!)^2}}$.

• Vu y de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, y admet en particulier des développements limités à tout ordre en 0 par la formule de Taylor-Young qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x au voisinage de 0 :

$$\underline{\underline{y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} + o(x^n) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k (k-1)!\, x^k + o(x^n).}}$$

Auteur du Sujet : M. NICAISE
Lycée La Fayette - Clermont-Ferrand

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie A

1. On a facilement que : $\forall t \in \mathbb{R}, a(t)+c(t)=0$, d'où $\underline{\underline{N(t) \in P}}$.

2. • Soit $M=(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a $M \in D$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x=-z \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=-\lambda \\ y=3 \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

• Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) \neq 3$, $\underline{\text{il est impossible que } N(t) \in D}$.

3. Soient S la sphère de centre O et de rayon 1 et $t \in \mathbb{R}$. On a : $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)=\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$. D'où $ON(t)=1$, donc $N(t)$ appartient à l'intersection $S \cap P$ qui est un cercle de P. En remarquant que le centre O de S est également sur P, il en résulte que le cercle de P cherché est de centre O, de rayon 1.

4. • Par le **2** on obtient $\overrightarrow{d}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$ directeur de D et $A=(0,3,0) \in D$. Par le cours,

$$d(N(t),D)=\frac{\|\overrightarrow{AN(t)} \wedge \overrightarrow{d}\|}{\|\overrightarrow{d}\|}=\frac{\sqrt{2(\sin(t)-3)^2}}{\sqrt{2}}=|\underbrace{\sin(t)-3}_{\leq 0}| \Rightarrow \underline{\underline{d(N(t),D)=3-\sin(t)}}.$$

• Ayant une équation cartésienne de Q, la distance de $N(t)$ à Q est donnée par :

$$d(N(t),Q)=\frac{|a(t)+b(t)+c(t)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \Rightarrow \underline{\underline{d(N(t),Q)=\frac{3-\sin(t)}{\sqrt{3}}}}.$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$, en notant $j=\exp(2i\pi/3)$, on a en utilisant $1+j+\bar{j}=0$:

$$\underline{\underline{e^{it}+e^{i(t+2\pi/3)}+e^{i(t-2\pi/3)}=e^{it}(1+j+\bar{j})=0}}.$$

6. Soient $t \in \mathbb{R}$. Notons $\Omega=(a,b,c)$ l'isobarycentre concerné ; par le cours et la question **5** on a :

$$a=\frac{1}{3}(a(t)+a(t+2\pi/3)+a(t-2\pi/3))=\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{Re}\left[\underbrace{e^{it}+e^{i(t+2\pi/3)}+e^{i(t-2\pi/3)}}_{=0}\right]=0.$$

De même, $c=0$ et $b=\frac{1}{3}\operatorname{Im}\left[e^{it}+e^{i(t+2\pi/3)}+e^{i(t-2\pi/3)}\right]=0$. Finalement, $a=b=c=0$ donc $\underline{\underline{\Omega=O}}$.

Partie B

7. Clairement, $\underline{\underline{s(t)=\sin(t)}}$.

8. On a :

$$p(t)=-\frac{1}{2}\cos^2(t)\sin(t)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)=-\frac{1}{16i}(e^{2it}+2+e^{-2it})(e^{it}-e^{-it})$$

$$=-\frac{1}{16i}(e^{3it}-e^{-3it}+e^{it}-e^{-it})=\underline{\underline{-\frac{1}{8}(\sin(3t)+\sin(t))}}.$$

9. • Un calcul direct mène à :

$$\underline{\underline{d(t) = \frac{-\cos^2(t)}{2}}}$$

que l'on peut également penser à linéariser, mais ce n'est pas demandé.

• D'autre part en utilisant le premier résultat de la question **3** :

$$\left(\underbrace{(s(t))^2}_{=\sin^2(t)} = (a(t)+b(t)+c(t))^2 = \underbrace{a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)}_{=1} + 2d(t)\right) \Rightarrow \underline{\underline{d(t) = \frac{\sin^2(t)-1}{2} = -\frac{\cos^2(t)}{2}}}.$$

10.a. Dans ce cas, $a(\pi/2) = 0 = c(\pi/2)$: 0 est racine multiple de $R(X)$. Donc par le cours, $\underline{\underline{\text{0 annule également } R'}}$.

10.b. • Par le cours, on sait que $\underline{\underline{R(X) = X^3 - s(t)X^2 + d(t)X - p(t)}}$.

• Donc par les questions précédentes,

$$\underline{\underline{R(X) = X^3 - \sin(t)X^2 - \frac{\cos^2(t)}{2}X + \frac{1}{8}(\sin(3t)+\sin(t)).}}$$

Partie C

11. Soit $\overrightarrow{e} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Alors $\overrightarrow{e} \in P$ ssi :

$$(z = -x) \Leftrightarrow (\overrightarrow{e} = x(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}) + y\overrightarrow{j}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{e} \in \text{Vect}[\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}])$$

donc $P = \text{Vect}[\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}]$. C'est donc un sous-espace vectoriel de E, engendré par $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{j}$. Ces vecteurs sont non colinéaires car $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\underline{\underline{P \text{ plan vectoriel de } E}}$.

12. On a $0+0+0-3 \neq 0$ donc $\overrightarrow{0} \notin Q$ ce qui contredit Q sev. En revanche, c'est le translaté du sev $\widetilde{Q}$ d'équation cartésienne $x+y+z=0$ par le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\underline{\underline{\text{c'est donc un sous-espace affine de } E}}$.

13. • On vérifie tout d'abord que $(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}') \in P^2$. Par ailleurs on calcule facilement : $\overrightarrow{i}'.\overrightarrow{i}' = 1 = \overrightarrow{j}'.\overrightarrow{j}'$, $\overrightarrow{i}'.\overrightarrow{j}' = 0$. Donc $\underline{\underline{(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}') \text{ base orthonormale de } P}}$.

• Par lecture sur l'équation cartésienne de P, $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ normal à P donc $\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{k}'$ aussi.

• Il résulte de ce qui précède que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une famille orthogonale de E. En calculant de plus $\overrightarrow{k}'.\overrightarrow{k}' = 1$, on obtient finalement que $\underline{\underline{(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}') \text{ base orthonormale de } E}}$.

14. Notons $\overrightarrow{e} = x\overrightarrow{i}' + y\overrightarrow{j}' + z\overrightarrow{k}'$. En effectuant des produits scalaires :

$$\overrightarrow{e}.\overrightarrow{i}' = (x\overrightarrow{i}' + y\overrightarrow{j}' + z\overrightarrow{k}').\overrightarrow{i}' = x\underbrace{\overrightarrow{i}'.\overrightarrow{i}'}_{=1} + y\underbrace{\overrightarrow{j}'.\overrightarrow{i}'}_{=0} + z\underbrace{\overrightarrow{k}'.\overrightarrow{i}'}_{=0}.$$

Donc $\underline{\underline{(\overrightarrow{e}.\overrightarrow{i}') = x}}$. De même on montrerait que $\underline{\underline{\overrightarrow{e}.\overrightarrow{j}' = y \text{ et } \overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}' = z}}$.

15.a. Soit $\overrightarrow{e} \in E$. En utilisant u linéaire et $\overrightarrow{i}'$, $\overrightarrow{j}'$ dans $\ker(u)$:

$$u(\overrightarrow{e}) = u\left((\overrightarrow{e}.\overrightarrow{i}')\overrightarrow{i}' + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{j}')\overrightarrow{j}' + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')\overrightarrow{k}'\right) = (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{i}')\underbrace{u\left(\overrightarrow{i}'\right)}_{=\overrightarrow{0}} + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{j}')\underbrace{u\left(\overrightarrow{j}'\right)}_{=\overrightarrow{0}} + (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')u\left(\overrightarrow{k}'\right).$$

D'où en posant $\underline{\underline{\overrightarrow{z} = u(\overrightarrow{k}')}}$, le résultat.

15.b. • Remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}) \in E^2$:

$$u(\lambda \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}) = (\lambda \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}).\overrightarrow{z} = \lambda \overrightarrow{e}.\overrightarrow{z} + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{z} = \lambda u(\overrightarrow{e}) + u(\overrightarrow{f}),$$

d'où la linéarité. Par ailleurs on a $u(E) \subset E$ donc finalement $\underline{\underline{u \text{ endomorphisme de } E}}$.

• De plus si $\overrightarrow{e} \in P$ alors $\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}' = 0$ donc $u(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{0}$ d'où l'inclusion $\underline{\underline{P \subset \ker(u)}}$.

15.c. • Supposons $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$. Alors pour tout $\overrightarrow{e} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \in E$:

$$(\overrightarrow{e} \in \ker(u)) \Leftrightarrow ((\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{e}.\overrightarrow{k}' = 0) \Leftrightarrow (x + z = 0) \Leftrightarrow (\overrightarrow{e} \in P).$$

Donc $\ker(u) = P$.

• Réciproquement, si $\ker(u) = P$ alors $\overrightarrow{k}' \notin P$ implique $u(\overrightarrow{k}') \neq \overrightarrow{0}$ donc $\underbrace{(\overrightarrow{k}'.\overrightarrow{k}')}_{=1}\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$.

Finalement : $\underline{\underline{(\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}) \Leftrightarrow (\ker(u) = P)}}$.

• u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, par le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(E)}_{=3} = \underbrace{\dim(P)}_{=2} + \mathrm{rg}(u)$$

donc $\underline{\underline{\mathrm{rg}(u) = 1}}$. En notant D la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$, donc de dimension 1, il est clair que $\mathrm{Im}(u) \subset D$. Vu $\dim(D) = \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$, alors $\underline{\underline{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}[\overrightarrow{z}]}}$.

Partie D

16. Par construction de la base B' on a $\overrightarrow{i}'$, $\overrightarrow{j}'$ invariants par p, et $\overrightarrow{k}'$ dans le noyau de p. Donc $p(\overrightarrow{i}') = \overrightarrow{i}', p(\overrightarrow{j}') = \overrightarrow{j}', p(\overrightarrow{k}') = \overrightarrow{0}$. D'où la matrice donnée.

17. • On a facilement par la définition de B' : $\underline{\underline{P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}}$.

• Par le cours, P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de B' à B. Or on a $\overrightarrow{i} = 1/\sqrt{2}(\overrightarrow{i}' + \overrightarrow{k}')$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}'$, $\overrightarrow{k} = 1/\sqrt{2}(-\overrightarrow{i}' + \overrightarrow{k}')$. D'où $\underline{\underline{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}}$.

18.a. p étant un projecteur, alors $p \circ p = p$ qui se traduit matriciellement par $\underline{\underline{M^2 = M}}$.

18.b. Nous allons faire une récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n : [(M+I)^n = I + (2^n - 1)M]$.

$*$ *Amorce :* la relation à vérifier est triviale pour $n = 0$.

$*$ *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$. Alors en utilisant $M^2 = M$ et $\mathscr{P}_n$:

$$(M+I)^{n+1} = (M+I)^n(M+I) = (I + (2^n - 1)M)(M+I) = I + (2^{n+1} - 1)M,$$

d'où $\mathscr{P}_{n+1}$.

$*$ *Conclusion :* le résultat est prouvé par récurrence.

18.c. Par le cours, $\underline{\underline{M = PM'P^{-1}}}$, puis par calcul, $\underline{\underline{M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}}$.

Auteur du Sujet : M. NICAISE
Lycée La Fayette - Clermont-Ferrand

19.a • La structure d'espace vectoriel s'obtient en montrant que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$; ceci est immédiat puisque par définition $\mathscr{M} = \text{Vect}[M,I]$ donc $(\mathscr{M},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• La famille (M,I) est génératrice de $\mathscr{M}$ par ce qui précède. Montrons qu'elle est libre : soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors en notant 0 la matrice nulle,

$$(\lambda M + \mu I = 0) \Rightarrow (M \times (\lambda M + \mu I) = 0) \Rightarrow (\lambda + \mu)M = 0.$$

Vu M non nulle (p n'est pas nul) alors $\lambda = -\mu$. Donc $\lambda(M-I) = 0$ et vu $M \neq I$ (p n'est pas l'identité de E) alors $\lambda = 0$, s'ensuit $\mu = 0$. D'où (M,I) base de $\mathscr{M}$ et $\dim(\mathscr{M}) = 2$.

19.b. • On a en utilisant la question **18.c** : $M_{a,b} = aPM'P^{-1} + bP \times P^{-1}$ donc $M_{a,b} = P(aM' + bI)P^{-1}$.

• Donc : $\det(M_{a,b}) = \cancel{\det(P)} \det(aM' + bI) \cancel{\det(P)^{-1}} = \det \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, donc :

$*$ $\det(M_{a,b}) = (a+b)^2 b$,

$*$ donc $M_{a,b}$ inversible si et seulement si $a \neq -b$ et $b \neq 0$.

19.c. Par le calcul et $M^2 = M$,

$$M_{a,b} \times M_{c,d} = (aM + bI) \times (cM + dI) = (ac + ad + bc)M + (bd)I,$$

d'où le résultat en posant $e = ac + ad + bc$, $f = bd$.

19.d. On suppose donc $b \neq 0$ et $a + b \neq 0$. En posant :

$$c = -\frac{a}{b(a+b)} \text{ et } d = 1/b,$$

alors par le calcul précédent on obtient :

$$M_{a,b} \times M_{c,d} = 0 \times M + 1 \times I = I,$$

donc l'inverse de $M_{a,b}$ est $M_{c,d}$.