CONCOURS COMMUN 2008

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 19 mai 2008 de 14H00 à 18H00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Dans tout ce problème, n désigne un entier non nul, a et b sont deux nombres réels.
La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\big(X - \frac{a+b}{2}\big)P$$

Partie A : Etude de φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X]\ ,\ \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \big(X - \frac{a+b}{2}\big)P$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.

4. On suppose, dans cette question seulement, que $a \neq b$.

(a). Démontrer que la famille $\mathcal{B} = \{X-a, X-b\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

(b). Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$ puis déduire $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$.

(c). Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.

(d). Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices M, M_1, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.

(e). Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question 4.(d), une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).

5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble $\Gamma = \{\alpha I_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3\ ,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\}$.

(a). Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b). Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2.

(c). Déterminer une base de Γ.

6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question 5.(b), déterminer l'application φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

Partie B : Quelques généralités sur φ_n

7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On se propose dans cette question de déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$.
On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.

(a). Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$ est continue sur I.

(b). Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

(c). Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}\, y = 0$$

(d). On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p})$.

(e). On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1})$ (On pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

Partie C : Intersections de courbes dans le cas où $n = 2$

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 2$, $a = b$ et $a > 1$.
On munit le plan d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1\,\text{cm}$.

9. Calculer $\varphi_2(1)$, $\varphi_2(X)$ et $\varphi_2(X^2)$. Dans toute la suite, on désigne par f et g les fonctions polynômiales associées respectivement aux polynômes $\varphi_2(1)$ et $\varphi_2(X^2)$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de ces deux fonctions.

10. (a). Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent exactement deux points d'intersection : les points A_a et B_a dont les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$ sont respectivement $A_a(a, 0)$ et $B_a\left(\frac{1}{a}, -\frac{2}{a} + 2a\right)$.

(b). Démontrer que, lorsque a varie dans $]1, +\infty[$, tous les points B_a appartiennent à un même ensemble E (indépendant de a) dont on précisera une équation cartésienne.

(c). Montrer que l'ensemble E est une conique dont on précisera (en le justifiant) la nature (aucune autre information n'est demandée sur E).

(d). Après une rapide étude, tracer l'allure de la courbe E dans $\mathcal{R}$.

SECOND PROBLÈME

On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad\qquad G(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

Partie A : Etudes de deux fonctions

1. (a). Montrer que les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b). Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.

2. (a). Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées.

(b). Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.

3. (a). Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k.

(b). Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$?

4. (a). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer <u>sans calcul</u> qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

(b). Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c). Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

(d). En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).

(e). Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.

(f). Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k).

5. Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_F$ de la fonction F lorsque l'abscisse x varie dans $[0, 4\pi]$. On se placera dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\| \overrightarrow{i} \| = 1$cm et $\| \overrightarrow{j} \| = 10$ cm. On fera apparaître clairement les tangentes horizontales à la courbe et on précisera les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_F$ avec l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. Si f appartient à E, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)dt \qquad\qquad J_f(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt$$

Soit f une fonction appartenant à E.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définis.
On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur $\mathbb{R}$.

7. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f.

8. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(a). Etablir que : $\forall x > 0\,,\ I_f(x) + iJ_f(x) = \dfrac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \dfrac{1}{ix}\displaystyle\int_0^1 f^{'}(t)e^{ixt}dt.$

(b). Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0,1]$.
On posera par la suite $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $M^{'} = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f^{'}(x)\right|$.

(c). En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0\,,\ |I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{A}{x}$.

(d). A l'aide de la question 8.(c), calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(I_f(x) + iJ_f(x)\big)$.
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J_f(x)$.

(e). En utilisant une propriété obtenue sur les fonctions I_f et J_f, calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} I_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} J_f(x)$.

9. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur $\mathbb{R}$.

(a). Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

(b). Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}\,,\ |\sin(u)| \leq |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).

(c). Soient x et y deux réels. Etablir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|dt.$

(d). En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
Par un raisonnement analogue, on pourrait démontrer que la fonction J_f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas demandé ici.

10. A l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, établir un lien entre les fonctions F et G de la partie A, et les fonctions I_f et J_f de la partie B.