Mines Sup 2008 - Epreuve commune Maths - Un Corrigé

PREMIER PROBLEME

PARTIE A - Etude de φ_1

Dans toute cette partie, on étudie l'application :

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & (X-a)(X-b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P \end{array}$$

1 Commençons par démontrer que φ_1 est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_1[X]$. Considérons pour cela un polynôme $P = \alpha + \beta X \in \mathbb{R}_1[X]$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_1(P) &= (X-a)(X-b)\beta - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(\alpha + \beta X) \\ &= \beta X^2 - (a+b)\beta X + ab\beta - \beta X^2 - \left(\alpha - \frac{a+b}{2}\beta\right)X + \frac{a+b}{2}\alpha \\ &= -(a+b)\beta X + ab\beta - \left(\alpha - \frac{a+b}{2}\beta\right)X + \frac{a+b}{2}\alpha \end{aligned}$$

On constate donc que $\varphi_1(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Par ailleurs, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \left(\mathbb{R}_1[X]\right)^2$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda P + \mu Q) &= (X-a)(X-b)(\lambda P + \mu Q)' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(\lambda P + \mu Q) \\ &= (X-a)(X-b)\left(\lambda P' + \mu Q'\right) - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda\left[(X-a)(X-b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P\right] + \mu\left(X-a)(X-b)Q' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)Q\right] \\ &= \lambda\varphi_1(P) + \mu\varphi_1(Q) \end{aligned}$$

L'application φ_1 est donc linéaire et on peut conclure :

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_1[X].}$$

2 On trouve :

$$\varphi_1(1) = \frac{a+b}{2} - X \qquad \qquad \varphi_1(X) = ab - \frac{a+b}{2}X$$

On déduit donc immédiatemment :

$$\boxed{M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{bmatrix}}$$

3 L'application φ_1 sera bijective si et seulement si la matrice M_1 est inversible, ce qui est encore équivalent à $\det(M_1) \neq 0$. Or :

$$\det(M_1) = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{vmatrix} = -\frac{a^2+2ab+b^2}{4} + ab = -\frac{(a-b)^2}{4}$$

En conclusion :

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est bijective si et seulement si } a \neq b}$$

4.a Montrons que la famille $\{X-a, X-b\}$ est une famille libre. Considérons pour cela $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(X-a) + \beta(X-b) = 0$. On déduit $(\alpha+\beta)X - (a\alpha + b\beta) = 0$, ce qui implique :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ a\alpha + b\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ a\alpha - b\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{car } a \neq b$$

La famille $\{X-a, X-b\}$ est donc libre. En tant que famille libre constituée de deux éléments dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, on déduit :

$$\boxed{\text{La famille } \{X-a, X-b\} \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].}$$

$\boxed{\textbf{4.b}}$ On trouve :

$$\varphi_1(X-a) = (X-a)(X-b) - \big(X - \frac{a+b}{2}\big)(X-a) = \frac{a-b}{2}(X-a)$$

$$\varphi_1(X-b) = (X-a)(X-b) - \big(X - \frac{a+b}{2}\big)(X-b) = \frac{b-a}{2}(X-b)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\textbf{4.c}}$ Des égalités

$$1 = \frac{1}{b-a}(X-a) - \frac{1}{b-a}(X-b) \qquad X = \frac{b}{b-a}(X-a) - \frac{a}{b-a}(X-b)$$

On déduit facilement :

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} & \frac{b}{b-a} \\ \frac{-1}{b-a} & \frac{-a}{b-a} \end{bmatrix}} \qquad \boxed{P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\textbf{4.d}}$ L'égalité attendue est :

$$\boxed{M_1 = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} \times M \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}}$$

$\boxed{\textbf{4.e}}$ La matrice M étant diagonale, on trouve facilement :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\,,\ M^p = \frac{(a-b)^p}{2^p}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{bmatrix}}$$

Or, d'après la question 4.(d), on peut écrire :

$$M_1^p = \Big(P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} \times M \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}\Big)^p = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} \times M^p \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$$

On obtient donc, après calculs :

$$\boxed{M_1^0 = I_2} \qquad \boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*\,,\ M_1^p = \begin{bmatrix} \dfrac{(a-b)^{p-1}\,(a-(-1)^p b)}{2^p} & \dfrac{(a-b)^{p-1}\,(ab-ab(-1)^p)}{2^p} \\ \dfrac{(a-b)^{p-1}\,(-1+(-1)^p)}{2^p} & \dfrac{(a-b)^{p-1}\,(-b+a(-1)^p)}{2^p} \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\textbf{5.a}}$ On constate que Γ est l'ensemble des combinaisons linéaires des quatre matrices I_2, M_1, M_1^2 et M_1^3. Autrement dit, on a :

$$\Gamma = \mathrm{Vect}\Big(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3\Big)$$

Il est alors clair que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{5.b}}$ On trouve, soit directement, soit d'après la question 4.(e) :

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{(a-b)^2}{4} \end{bmatrix} \qquad M_1^3 = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^2(a+b)}{8} & \frac{ab(a-b)^2}{4} \\ -\frac{(a-b)^2}{4} & -\frac{(a+b)(a-b)^2}{8} \end{bmatrix}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\boxed{M_1^2 = \frac{(a-b)^2}{4} I_2} \qquad \boxed{M_1^3 = \frac{(a-b)^2}{4} M_1}$$

$\boxed{\textbf{5.c}}$ D'après la question 5.(a), on peut écrire $\Gamma = \text{Vect}\Big(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3\Big)$. Or, la matrice M_1^2 est un multiple de I_2 et la matrice M_1^3 est un multiple de M_1. On déduit donc $\Gamma = \text{Vect}\Big(I_2, M_1\Big)$. La famille $\{I_2, M_1\}$ est donc une famille génératrice de Γ. Or, cette famille n'est pas liée car la matrice M_1 n'est pas un multiple de I_2. Cette famille est donc libre et on peut conclure que c'est une base de Γ :

$$\boxed{\text{La famille } \{I_2, M_1\} \text{ est une base de } \Gamma.}$$

$\boxed{\textbf{6}}$ Puisque $\frac{(a-b)^2}{4} = 1$, on peut dire d'après la question 5.(b) que $M_1^2 = I_2$. On peut donc en déduire que $\varphi_1 \circ \varphi_1 = \text{id}_E$, donc :

$$\boxed{\text{L'application } \varphi_1 \text{ est une symétrie.}}$$

Soit $P = \alpha + \beta X \in \mathbb{R}_1[X]$. On trouve :

$$\varphi_1(P) = P \quad \Longleftrightarrow \quad M_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3\alpha + 8\beta = \alpha \\ -\alpha - 3\beta = \beta \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -4\beta$$

$$\varphi_1(P) = -P \quad \Longleftrightarrow \quad M_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3\alpha + 8\beta = -\alpha \\ -\alpha - 3\beta = -\beta \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -2\beta$$

Ainsi, l'ensemble des éléments invariants par φ_1 est $\{-4\beta + \beta X \ , \ \beta \in \mathbb{R}\}$, c'est à dire $\text{Vect}\big(X - 4\big)$. Par ailleurs, l'ensemble des éléments changés en leur opposé par φ_1 est $\{-2\beta + \beta X \ , \ \beta \in \mathbb{R}\}$, c'est à dire $\text{Vect}\big(X - 2\big)$. En conclusion :

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est la symétrie par rapport à } \text{Vect}\big(X - 4\big) \text{ suivant la direction } \text{Vect}\big(X - 2\big).}$$

PARTIE B - Quelques généralités sur φ_n

$\boxed{\textbf{7}}$ Considérons deux polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{R}_n[X]$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On trouve :

$$\begin{aligned}
\varphi_n\big(\alpha P_1 + \beta P_2\big) &= (X-a)(X-b)\big(\alpha P_1 + \beta P_2\big)' - n(X - \frac{a+b}{2})\big(\alpha P_1 + \beta P_2\big) \\
&= (X-a)(X-b)\big(\alpha P_1' + \beta P_2'\big) - n(X - \frac{a+b}{2})\big(\alpha P_1 + \beta P_2\big) \\
&= \alpha(X-a)(X-b)P_1' + \beta(X-a)(X-b)P_2' - n\alpha(X - \frac{a+b}{2})P_1 - n\beta(X - \frac{a+b}{2})P_2 \\
&= \alpha\left[(X-a)(X-b)P_1' - n(X - \frac{a+b}{2})P_1\right] + \beta\left[(X-a)(X-b)P_2' - n(X - \frac{a+b}{2})P_2\right] \\
&= \alpha\varphi_n(P_1) + \beta\varphi_n(P_2)
\end{aligned}$$

L'application φ_n est donc linéaire. Montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ revient alors à démontrer que $\varphi_n\big(\mathbb{R}_n[X]\big) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Considérons pour cela $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et démontrons que $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. En écrivant

$$P = \alpha X^n + Q \quad \text{où} \quad Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi_n(P) &= (X-a)(X-b)P' - n(X - \frac{a+b}{2})P \\
&= \big(X^2 - (a+b)X + ab\big)\big[n\alpha X^{n-1} + Q'\big] - n(X - \frac{a+b}{2})\big[\alpha X^n + Q\big] \\
&= \Big(\underline{n\alpha X^{n+1}} - n(a+b)\alpha X^n + abn\alpha X^{n-1} + X^2 Q' - (a+b)XQ' + abQ'\Big) \\
&\quad -\Big(\underline{n\alpha X^{n+1}} + nXQ - n\alpha\frac{a+b}{2}X^n - n\frac{a+b}{2}Q\Big)
\end{aligned}$$

Les deux termes soulignés s'éliminent, et puisque $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, les autres termes ont un degré inférieur ou égal à n. Ainsi, $\deg\big(\varphi_n(P)\big) \leq n$. L'application φ_n est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{\textbf{8.a}}$ La fonction f est le quotient de deux fonctions polynômiales, donc, continues sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur se factorise sous la forme $(x-a)(x-b)$, et s'annule donc en a et b. Lorsque $x > a$ et $x > b$, c'est-à-dire, lorsque

$x \in I$, ce dénominateur se n'annule pas. En conclusion, la fonction proposée est continue sur I en tant que quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur I.

$\boxed{\textbf{8.b}}$ On constate que la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2-(a+b)x+ab$ n'est autre que la fonction $x \mapsto 2x-(a+b)$. On déduit donc immédiatement :

$$\int \frac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}dx = \ln\left|x^2-(a+b)x+ab\right| + C$$

Si on travaille sur l'intervalle I, la fonction entre valeurs absolues est strictement positive, donc, la valeur absolue est superflue. Ainsi, une primitive convenable sur I est la fonction $F : x \mapsto \ln\big(x^2-(a+b)x+ab\big)$.

$\boxed{\textbf{8.c}}$ L'équation proposée est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. Travaillons sur l'intervalle I. On trouve :

$$\int -\frac{nx-n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}dx = -\frac{n}{2}\int \frac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}dx = -\frac{n}{2}\ln\big((x-a)(x-b)\big) = -\ln\left[(x-a)^{\frac{n}{2}}(x-b)^{\frac{n}{2}}\right]$$

D'après le cours, les fonctions solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda\exp\left(\ln\left[(x-a)^{\frac{n}{2}}(x-b)^{\frac{n}{2}}\right]\right) = \lambda(x-a)^{\frac{n}{2}}(x-b)^{\frac{n}{2}} \qquad , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\textbf{8.d}}$ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n) &\iff \varphi_n(P) = 0\\
&\iff (X-a)(X-b)P^{'} - n(X-\frac{a+b}{2})P = 0\\
&\iff \forall x \in]\alpha,+\infty[\,,\ (x-a)(x-b)P^{'}(x) - n\big(x-\frac{a+b}{2}\big)P(x) = 0\\
&\qquad \text{(la condition suffisante étant dû au fait qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nul)}\\
&\iff \text{La fonction } x \mapsto P(x) \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]\alpha,+\infty[\\
&\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in]\alpha,+\infty[\,,\ P(x) = \lambda(x-a)^{\frac{n}{2}}(x-b)^{\frac{n}{2}}\\
&\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in]\alpha,+\infty[\,,\ P(x) = \lambda(x-a)^{p}(x-b)^{p}\\
&\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}\,,\ P = \lambda(X-a)^{p}(X-b)^{p}
\end{aligned}$$

On déduit donc immédiatement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\big(\varphi_{2p}\big) = \mathrm{Vect}\Big((X-a)^p(X-b)^p\Big)}$$

$\boxed{\textbf{8.e}}$ Par le même raisonnement que dans la question précédente, on trouve :

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1}) \qquad \iff \qquad \exists\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in]\alpha,+\infty[\,,\ P(x) = \lambda(x-a)^p(x-b)^p\sqrt{(x-a)(x-b)}$$

On peut alors distinguer deux cas :
▷ Si $a = b$: un polynôme P appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1})$ si et seulement si :

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in]\alpha,+\infty[\,,\ P(x) = \lambda(x-a)^{2p+1}$$

Cela revient à dire que P est un multiple de $(X-a)^{2p+1}$.
▷ Si $a \neq b$: les éléments de $\mathrm{Ker}\big(\varphi_{2p+1}\big)$ étant nécessairement des polynômes, il est alors nécessaire et suffisant que $\lambda = 0$, c'est-à-dire que $P = 0$.
En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\big(\varphi_{2p+1}\big) = \begin{cases}\{0\} & \text{si } a \neq b\\ \mathrm{Vect}\big((X-a)^{2p+1}\big) & \text{si } a = b\end{cases}}$$

PARTIE C - Intersections de courbes dans le cas où $n = 2$

Dans toute cette partie, on étudie l'application :

$$\varphi_2 : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X]\\ P & \longmapsto & (X-a)^2P^{'} - 2(X-a)P\end{array}$$

$\boxed{9}$ On trouve, après calculs :

$$\boxed{\varphi_2(1) = 2a - 2X} \qquad \boxed{\varphi_2(X) = a^2 - X^2} \qquad \boxed{\varphi_2(X^2) = -2aX(X-a)}$$

$\boxed{\textbf{10.a}}$ Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a :

$$M \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2a - 2x \\ y = 2a^2x - 2ax^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2a - 2x \\ 2ax^2 - (2 + 2a^2)x + 2a = 0 \end{cases}$$

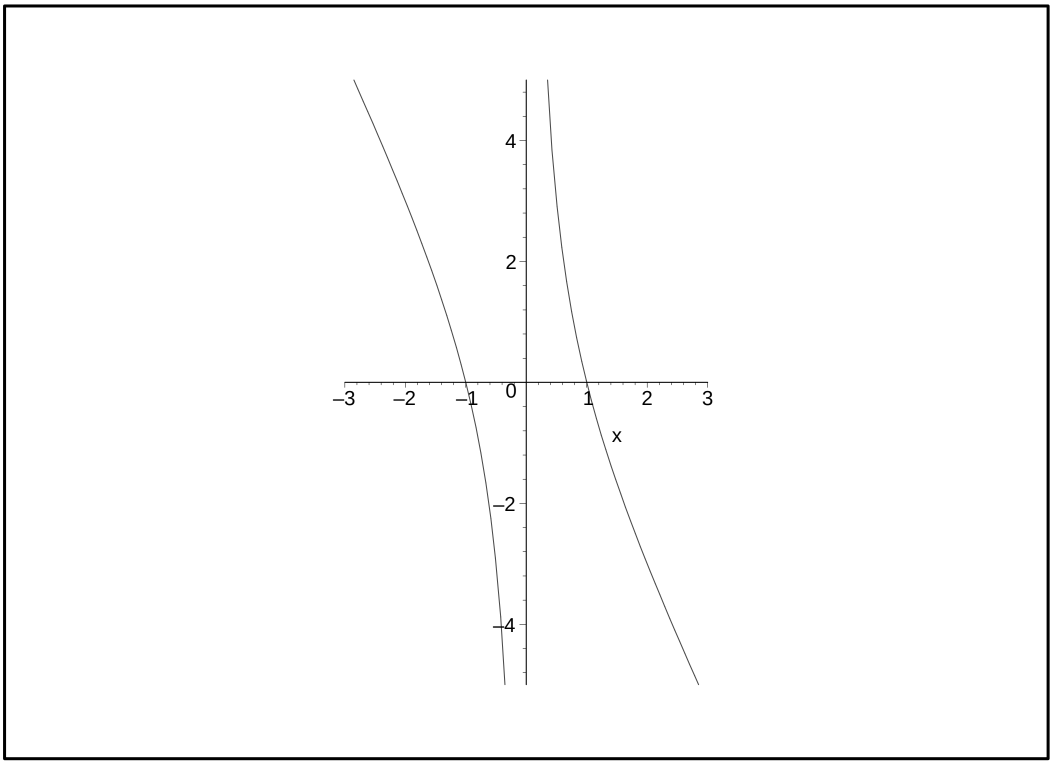
L'équation du second degré qui apparaît admet pour discriminant $\Delta = 4(a^2 - 1)^2$. On trouve $\sqrt{\Delta} = 2|a^2 - 1|$, soit encore $\sqrt{\Delta} = 2(a^2-1)$ car $a > 1$. Les deux racines de l'équation concernée sont $x = a$ et $x = \frac{1}{a}$. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g = \left\{(a, 0), \left(\frac{1}{a}, 2a - \frac{2}{a}\right)\right\}}$$

$\boxed{\textbf{10.b}}$ Si $M(x, y)$ est l'un des points B_a, alors, $y = \frac{2}{x} - 2x$, ce qui peut encore s'écrire : $\boxed{2x^2 + xy - 2 = 0}$.

$\boxed{\textbf{10.c}}$ L'équation définissant l'ensemble (E) est donnée par une équation algébrique de degré 2. L'ensemble (E) est donc une conique. Puisque son discriminant est strictement positif (il vaut 1), nous avons affaire à une hyperbole ou à l'union de deux droites sécantes. Puisque (E) est donnée par une équation de la forme $y = h(x)$, on peut exclure la seconde possibilité. Il s'agit donc d'une hyperbole.

$\boxed{\textbf{10.d}}$ Désignons par $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 2x$ la fonction associée à l'hyperbole (E). La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on trouve $h^{'}(x) = -\frac{2}{x^2} - 2 < 0$. Par ailleurs, $\mathcal{C}_h$ admet la droite (Oy) pour asymptote verticale en 0 et la droite d'équation $y = -2x$ pour asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$. On obtient donc le tracé suivant :



Remarque : Il y a une inclusion stricte entre l'ensemble des points B_a (chacun de ces points ayant une abscisse comprise strictement entre 0 et 1 vu que $a > 1$) et l'ensemble E qui est l'hyperbole toute entière.

SECOND PROBLEME

PARTIE A - Etude de deux fonctions

1.a Les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotients de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

1.b Les deux calculs

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin^{'}(0) = \cos(0) = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = -\cos^{'}(0) = \sin(0) = 0$$

montrent que les fonctions F et G admettent des limites finies en 0. On peut donc prolonger F et G par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$ et $G(0) = 0$.

2.a Les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On trouve, grâce à la formule de dérivation d'un quotient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F^{'}(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} \qquad\qquad G^{'}(x) = \frac{x\sin(x)-1+\cos(x)}{x^2}$$

2.b Lorsque x est proche de 0, on peut écrire :

$$F(x) = \frac{x+o(x^2)}{x} = 1 + o(x) \qquad\qquad G(x) = \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x} = \frac{x}{2} + o(x)$$

Les fonctions F et G admettent donc un développement limité à l'ordre 1 en 0, ce qui démontre d'après le cours qu'elles sont dérivables en 0. Les valeurs $F^{'}(0)$ et $G^{'}(0)$ ne sont autres que les coefficients du terme en x dans les écritures ci-dessus. Autrement dit : $F^{'}(0) = 0$ et $G^{'}(0) = \frac{1}{2}$.

3.a Si $x > 0$, le réel $F(x)$ est nul si et seulement si $\sin(x) = 0$, ce qui équivaut à dire que $x \in \pi\mathbb{N}^*$. On peut donc poser, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{a_k = k\pi}$. Tous les termes a_k ($k \in \mathbb{N}^*$) sont bien strictement positifs et la suite (a_k) est clairement strictement croissante.

3.b Si $x > 0$, le réel $G(x)$ est nul si et seulement si $1-\cos(x) = 0$, ce qui équivaut à dire que $x \in 2\pi\mathbb{N}^*$. On peut donc poser, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{b_k = 2k\pi}$. La suite (b_k) est strictement croissante, constituée de réels strictement positifs, et c'est une sous-suite de la suite (a_k) en considérant uniquement les termes de la suite (a_k) ayant un indice pair.

4.a Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[a_k, a_{k+1}]$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $]a_k, a_{k+1}[$, et on a $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$. On peut donc déduire du théorème de Rolle qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F^{'}(x_k) = 0$.

4.b Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire $F^{'}(x) = \frac{h(x)}{x^2}$, de sorte que $F^{'}$ est de même signe que la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.c Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, sur $[a_k, a_{k+1}]$, et on trouve $h^{'}(x) = -x\sin(x)$. Le réel $h^{'}(x)$ est donc du signe de $-\sin(x)$ sur $[a_k, a_{k+1}] = [k\pi, (k+1)\pi]$. On trouve donc :

$$\forall x \in]a_k, a_{k+1}[\,, \begin{cases} h^{'}(x) < 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ h^{'}(x) > 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

La fonction h est donc strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

4.d La fonction h est continue et strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$, donc, réalise une bijection de $[a_k, a_{k+1}]$ sur $h\big([a_k, a_{k+1}]\big)$. Or, $h(a_k)h(a_{k+1}) = -k(k+1)\pi^2 < 0$, donc, h s'annule une unique fois sur $]a_k, a_{k+1}[$. Il en est donc de même de la fonction $F^{'} : x \mapsto \frac{h(x)}{x^2}$. Il existe donc un unique réel x_k annulant $F^{'}$ sur $]a_k, a_{k+1}[$

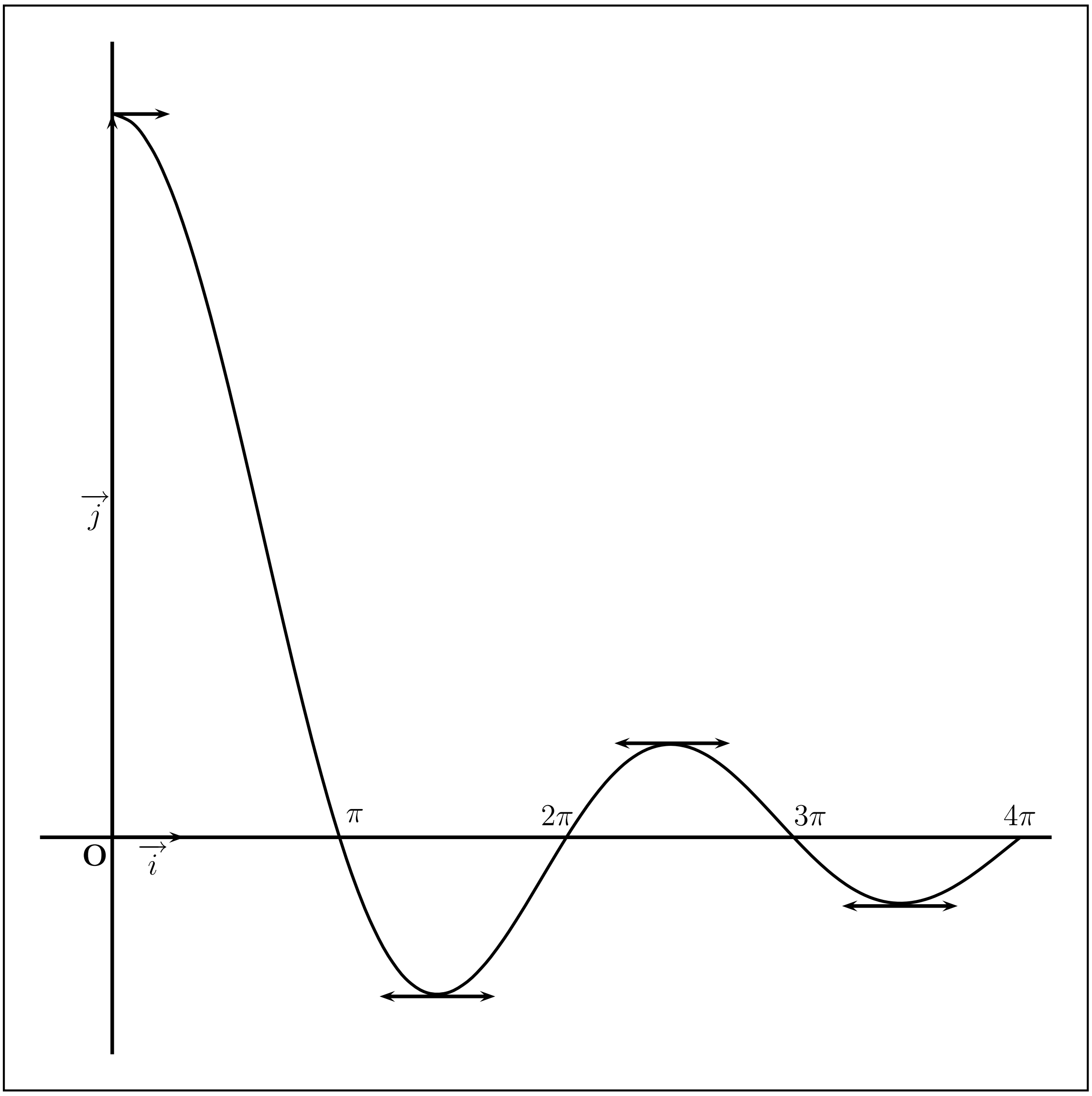
$\boxed{\textbf{4.e}}$ On constate que $h(a_k)h\left(a_k+\frac{\pi}{2}\right)=-k\pi<0$, donc, le réel x_k appartient bien à l'intervalle $]a_k, a_k+\frac{\pi}{2}[$.

$\boxed{\textbf{4.f}}$ On a $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \lim\limits_{k\to+\infty} k\pi = +\infty$ et $x_k \geq a_k$, donc, par comparaison, on déduit : $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty}$.
De l'encadrement $a_k < x_k < a_k + \frac{\pi}{2}$, on déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$1 < \frac{x_k}{a_k} < 1 + \frac{\pi}{2a_k}$$

Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$, on déduit alors du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{x_k}{a_k} = 1$, soit encore : $\boxed{x_k \underset{+\infty}{\sim} k\pi}$.

$\boxed{5}$ Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}_F$ lorsque $x \in [0, 4\pi]$.



PARTIE B - Deux fonctions définies par des intégrales

$\boxed{6}$ Les fonctions f et g sont continues sur $[0,1]$, donc, les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ sont continues sur $[0,1]$. Les deux intégrales $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont donc définies.

$\boxed{7}$ La fonction cos étant paire, on peut écrire

$$I_f(-x) = \int_0^1 f(t)\cos(-xt)dt = \int_0^1 f(t)\cos(xt)dt = I_f(x)$$

ce qui démontre que I_f est paire. Par le même raisonnement, en utilisant le fait que la fonction sin est impaire, on démontre que J_f est impaire.

$\boxed{\textbf{8.a}}$ Commençons par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t)\big(\cos(xt) + i\sin(xt)\big)dt = \int_0^1 f(t)e^{ixt}dt$$

Nous allons effectuer une intégration par parties dans la dernière intégrale en dérivant la fonction f qui est de classe C^1. On obtient, pour $x > 0$:

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \left[f(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{e^{ixt}}{ix}dt = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}dt$$

$\boxed{\textbf{8.b}}$ La fonction f appartient à E, donc, elle est de classe C^1 sur $[0,1]$. En particulier, les fonctions f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$, donc, y sont bornées. On pose donc :

$$M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad\qquad M' = \sup_{x\in[0,1]} \left|f'(x)\right|$$

$\boxed{\textbf{8.c}}$ D'après la question précédente, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} |I_f(x) + iJ_f(x)| &\leq \left|\frac{f(1)e^{ix}}{ix}\right| + \left|\frac{f(0)}{ix}\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}dt\right| \\ &\leq \frac{|f(1)|}{x} + \frac{|f(0)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \left|f'(t)\right| dt \\ &\leq \frac{M}{x} + \frac{M}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 M' dt \\ &\leq \frac{2M + M'}{x} \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat attendu en posant $A = 2M + M'$.

$\boxed{\textbf{8.d}}$ Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{A}{x} = 0$, le résultat de la question précédente permet d'obtenir par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} \big|I_f(x) + iJ_f(x)\big| = 0$. Il en résulte donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(I_f(x) + iJ_f(x)\big) = 0$. Les parties réelle et imaginaire de ce dernier nombre complexe tendent donc aussi vers 0, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} I_f(x) = 0} \qquad\qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} J_f(x) = 0}$$

$\boxed{\textbf{8.e}}$ Les fonctions I_f et J_f sont respectivement paire et impaire d'après la question B.7, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} I_f(x) = 0} \qquad\qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} J_f(x) = 0}$$

$\boxed{\textbf{9.a}}$ $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

$\boxed{\textbf{9.b}}$ La fonction sinus possède une dérivée majorée, en valeur absolue, par 1. L'inégalité des accroissements finis permet alors d'affirmer que la fonction sinus est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

En particulier, en prenant $y = 0$, on obtient le résultat souhaité.

$\boxed{\textbf{9.c}}$ Soient x et y deux réels. On trouve :

$$\begin{aligned} I_f(x) - I_f(y) &= \int_0^1 f(t)\cos(xt)dt - \int_0^1 f(t)\cos(yt)dt = \int_0^1 f(t)\big[\cos(xt) - \cos(yt)\big]dt \\ &= -2\int_0^1 f(t)\sin\big(\frac{x+y}{2}t\big)\sin\big(\frac{x-y}{2}t\big)dt \qquad \text{(d'après la question 9.(a))} \end{aligned}$$

La majoration obtenue dans la question 9.b et l'inégalité $|\sin(u)| \leq 1$ permettent alors d'obtenir :

$$|I_f(x) - I_f(y)| \leq 2\int_0^1 |f(t)| \times \left|\frac{x-y}{2}t\right| dt = |x - y| \int_0^1 t\,|f(t)|\,dt$$

9.d Posons $K = \int_0^1 t\,|f(t)|\,dt$. D'après la question précédente, la fonction I_f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve d'après le cours qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

10 Considérons la fonction f définie par : $\forall t \in [0,1]\,,\; f(t) = 1$. Nous allons démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\,,\; I_f(x) = F(x) \text{ et } J_f(x) = G(x)$$

ce qui établira bien un lien entre les parties A et B du problème.
Si $x = 0$, on trouve :

$$I_f(0) = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 dt = 1$$

et cette dernière quantité n'est autre que $F(0)$ d'après la question 1.(b). Soit maintenant $x > 0$. on obtient :

$$I_f(x) = \int_0^1 \cos(xt)dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^1 = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x} = F(x)$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall x \geq 0\,,\; I_f(x) = F(x)}$$

Si $x = 0$, on trouve :

$$J_f(0) = \int_0^1 0dt = 0$$

et cette dernière quantité n'est autre que $G(0)$ d'après la question 1.(b). Soit maintenant $x > 0$. on obtient :

$$J_f(x) = \int_0^1 \sin(xt)dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_0^1 = \frac{\cos(0) - \cos(x)}{x} = G(x)$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall x \geq 0\,,\; J_f(x) = G(x)}$$