# CONCOURS COMMUN 2009
## DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

**Épreuve de Mathématiques**

**(toutes filières)**

**Lundi 18 mai 2009 de 14h00 à 18h00**

**Instructions générales :**

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

**L'emploi d'une calculatrice est interdit**

**Remarque importante :**
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## Problème I : Algèbre et Géométrie

### A. Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

**1.** Vérifier que $f$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que $f$ est linéaire.

**2.** Montrer que $\varphi$ est linéaire.

**3.** Ecrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.

**4.** L'application $f$ est-elle injective ? surjective ?

**5.** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ ?

**6.** L'application $\varphi$ est-elle injective ? surjective ?

**B. Calcul des puissances successives d'une matrice**

On note $I_3$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1).$$

**7.** Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**8.** Ecrire la matrice de passage $Q$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

**9.** Justifier que $Q$ est inversible et calculer son inverse.

**10.** Ecrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.

**11.** Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de $A^n$.

**12.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de $a, b, c$.

**13.** En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

**C. Une autre preuve du résultat précédent**

**14.** A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

**15.** En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

**D. Etude d'une famille de sphères et d'une famille de droites**

L'espace affine usuel est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les différentes équations qui apparaissent dans la partie D. sont relatives au repère $\mathcal{R}$. Pour tout $m$ réel, on considère l'ensemble $S_m$ d'équation cartésienne

$$S_m \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 - 2 = 0.$$

On appelle aussi $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation

$$\mathcal{E} \quad : \quad x^2 + y^2 = z^2 + 2.$$

On note enfin $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y = 0$, c'est-à-dire le plan $(xOz)$.

**16.** Démontrer que, pour tout $m$ réel, $S_m$ est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

**17.** Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{E}$ est une conique $G$, dont on déterminera la nature et les asymptotes éventuelles.

**18.** Représenter dans le plan $\mathcal{P}$ la conique $G$.

**19.** Donner l'excentricité ainsi que les coordonnées du ou des foyer(s) dans le repère $\mathcal{R}$ de la conique $G$.

20. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la droite $(D_\theta)$ ayant pour système d'équations cartésiennes

$$(D_\theta) : \begin{cases} x - z\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta \\ y - z\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta. \end{cases}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer un point et un vecteur directeur de la droite $(D_\theta)$.
*On choisira un vecteur directeur dont la troisième coordonnée est égale à 1.*

21. Soient $\theta$ et $m$ deux réels quelconques. Prouver que la droite $(D_\theta)$ est tangente à la sphère $S_m$.

22. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite $(D_\theta)$ est incluse dans $\mathcal{E}$.

23. Réciproquement, montrer que si $M$ est un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z)$ dans le repère $\mathcal{R}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M$ appartienne à la droite $(D_\theta)$.

24. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

# Problème II : Analyse

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.

## A. Etude d'une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Etudier la parité de $f$.
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de $f$ en 0.
3. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}(X) < X$.
5. En déduire le tableau de variations de $f$.
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $f$ admet un développement de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

   où $a_0, \dots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.
8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée $F$, puis prouver que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

## B. Tracé d'une courbe paramétrée

On s'intéresse à l'arc paramétré défini pour $t \neq 0$ par les équations

$$\begin{cases} x(t) = t\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ y(t) = t\exp\left(\dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$$

On note $\Gamma$ son support. On donne la valeur approchée $\mathrm{sh}(1) \approx 1,18$ à $10^{-2}$ près.

**9.** Dresser le tableau des variations des fonctions $x$ et $y$ sur $\mathbb{R}^*$, en précisant les limites.

**10.** Déterminer les asymptotes de $\Gamma$ et préciser la position de $\Gamma$ par rapport à chacune de ses asymptotes.
*On résumera l'étude à l'aide de schémas.*

**11.** Tracer l'allure de $\Gamma$, ainsi que ses asymptotes et la tangente à $\Gamma$ au point $M$ de paramètre $t = 1$.
On prendra 2 cm comme unité en abscisses et en ordonnées.

**C. Une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle $(E)$ suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \mathrm{ch}(x). \qquad (E)$$

**12.** Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E)$.

**13.** Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

**14.** Justifier que la fonction $F$ (définie dans la question A.8.) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

**D. Etude d'une suite**

**15.** Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note $u_n$.
On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

**16.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

**17.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**18.** En utilisant la question A.7., déterminer un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**E. Une fonction définie par une intégrale**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$.

**19.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$.

**20.** Justifier que $J$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

**21.** En déduire le signe de $J'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ; on exprimera le (ou les) zéro(s) de $J'$ à l'aide de la fonction ln.

**22.** *On admet les résultats suivants :*
$(*)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} J(x) = +\infty$,
$(*)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} J(x) = +\infty$ *et $J$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation* $y = \frac{x}{2}$,
$(*)$ *la courbe représentative de $J$ est toujours "au dessus" de l'asymptote précédente.*

Donner le tableau de variations de $J$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**23.** Tracer l'allure de la courbe représentative de $J$.
*On donne pour le tracé :* $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$ *et* $J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ *à* $10^{-2}$ *près.*

FIN DU SUJET