Proposition de corrigé - Épreuve commune de Mathématiques

Problème I : Algèbre et Géométrie

A. Etude de deux applications

1. Montrons que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$: Soit $P = a + bX + cX^2$ un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$f(P) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[a + \frac{bX}{2} + \frac{cX^2}{4} + a + b\frac{X+1}{2} + c\frac{(X+1)^2}{4}\right]$$

Après simplification, on trouve $\boxed{f(P) = \frac{1}{2}\left(c\frac{X^2}{2} + \left(\frac{c}{2} + b\right)X + 2a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}\right) \in \mathbb{R}_2[X].}$

Montrons que f est linéaire :
Soient P, Q deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ, μ deux réels.

$$f(\lambda P+\mu Q) = \frac{1}{2}\left[(\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right].$$

Donc, après regroupement des termes,

$$f(\lambda P + \mu Q) = \frac{\lambda}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] + \frac{\mu}{2}\left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right].$$

Finalement,

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

Ceci montre que

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

2. Montrons que φ est linéaire.
Soient P, Q deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ, μ deux réels.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q),$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

3. On calcule :

$$f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$f(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{X}{2} + \frac{1}{4}.$$

$$f(X^2) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X+1}{2}\right)^2\right] = \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8}.$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.}$$

4. Le déterminant de f est égal au déterminant de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Donc

$$\det f = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \neq 0$$

donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est à la fois injective et surjective.}}$

5. Soit $P = a + bX + cX^2$ un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow \varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow a + b + c = 0 \Longleftrightarrow a = -b - c.$$

D'où

$$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow P = b(X-1) + c(X^2-1),$$

où les réels b, c sont quelconques. Ainsi

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\{X-1, X^2-1\}.}$$

La famille $\{X-1, X^2-1\}$ est génératrice du noyau de φ. De plus, les deux polynômes $X-1$,X^2-1 sont non proportionnels donc ils forment une famille libre (ou bien on peut dire qu'ils sont tous deux non nuls et qu'ils forment une famille échelonnée en degré donc libre). Donc

$$\boxed{(X-1, X^2-1) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\varphi \text{ et } \dim\operatorname{Ker}\varphi = 2}$$

Autre solution : Soit P un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow \varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow P(1) = 0 \Longleftrightarrow X-1|P.$$

Donc

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}\varphi &\Longleftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P = (X-1)Q \\ &\Longleftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = (X-1)(aX+b) \\ &\Longleftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = a(X^2-X) + b(X-1) \\ &\Longleftrightarrow P \in \operatorname{Vect}\{X^2-X, X-1\} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\{X^2-X, X-1\}.}$$

Comme dans la solution précédente, on montre ensuite que

$$\boxed{(X^2-X, X-1) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\varphi \text{ et } \dim\operatorname{Ker}\varphi = 2}$$

6. $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 2 \neq 0$ donc $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$ donc

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective.}}$$

De plus, par le théorème du rang,

$$\dim\mathbb{R}_2[X] = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi.$$

donc $\dim\operatorname{Im}\varphi = 3 - 2 = 1$. Or $\dim\mathbb{R} = 1$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$ donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$ et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est surjective.}}$$

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

7. La famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre, car c'est une famille de polynômes tous non nuls et échelonnée en degré. De plus, elle comporte trois éléments, et $\dim\mathbb{R}_2[X] = 3$ donc

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

8. On trouve

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}.$$

9. La matrice Q est inversible car c'est une matrice de passage. Un rapide calcul montre que

$$\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}.$$

10. On calcule et on trouve $f(1) = 1$, $f(-2X+1) = \dfrac{-2X+1}{2}$ et $f(6X^2-6X+1) = \frac{1}{4}(6X^2-6X+1)$. On en déduit que

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}.$$

11. On constate que la matrice A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, d'après la question A.3.
D'après les formules de changement de base, $M = Q^{-1}AQ$ donc $A = QMQ^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QM^nQ^{-1}$.
Or la matrice M est diagonale donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$$

Donc, après calculs,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}} & \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}} \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{2n}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}}.$$

12. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On note $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Calculer $f^n(P)$ revient à calculer matriciellement A^nV, car A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et V est le vecteur colonne contenant les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

$$A^nV = \begin{pmatrix} a + \dfrac{b}{2} - \dfrac{b}{2^{n+1}} + \dfrac{c}{3} - \dfrac{c}{2^{n+1}} + \dfrac{c}{3 \cdot 2^{2n+1}} \\ \dfrac{b}{2^n} + \dfrac{c}{2^n} - \dfrac{c}{2^{2n}} \\ \dfrac{c}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$f^n(P) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{2^{2n}}\right)X + \frac{c}{2^{2n}}X^2.$$

13. Avec les notations précédentes,

$$\varphi(f^n(P)) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{2^{2n}}\right) + \frac{c}{2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}.}$$

De plus,

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \left[at + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}.}$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)\,dt.}$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. On fixe $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et on procède par récurrence sur n.
Soit $\mathcal{H}_n$ la propriété

$$\mathcal{H}_n \quad : \quad \text{"} f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right) \text{"}$$

<u>Initialisation :</u> pour $n = 1$,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^1-1} P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = f(P)$$

ce qui montre que $\mathcal{H}_1$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Supposons la propriété $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang n fixé. Montrons alors que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Comme $\mathcal{H}_n$ est vraie,

$$f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

Donc

$$f^{n+1}(P) = f\big(f^n(P)\big) = f\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right)$$

Or f est linéaire donc on obtient

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right) + P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right)\right].$$

Après séparation en deux sommes, on trouve

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)\right].$$

Or lorsque k varie dans l'ensemble $\{0,1,2,\ldots,2^n-1\}$, $2k$ varie dans l'ensemble $\{0,2,4,\ldots,2^{n+1}-2\}$, $2k+1$ varie dans l'ensemble $\{1,3,5,\ldots,2^{n+1}-1\}$ et la réunion de ces deux ensembles disjoints est $\{0,1,2,\ldots,2^{n+1}-1\}$. Ceci justifie que l'on puisse "rassembler" les deux sommes en une seule et obtenir ainsi

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right).$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{la propriété } \mathcal{H}_n \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ ce qui démontre le résultat souhaité.}}$

15. On va utiliser le résultat suivant sur les $\boxed{\text{sommes de Riemann}}$.

Premier énoncé possible :

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b g(t)\,dt.$$

Remarque : on peut aussi énoncer le résultat pour des sommes de Riemann "à gauche" :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b g(t)\,dt.$$

Deuxième énoncé possible : (cas particulier du résultat précédent lorsque $a=0$ et $b=1$)

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

En appliquant par exemple le deuxième énoncé à la fonction polynomiale P, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

En particulier, la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite extraite de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

Posons $j=k-1$ dans la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$. Il vient alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\frac{j+1}{2^n}\right)$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\frac{j+1}{2^n}\right) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

Or $\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\frac{j+1}{2^n}\right) = \varphi(f^n(P))$ d'après la question précédente. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,dt.}$$

D. Etude d'une famille de sphères et d'une famille de droites

16. Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace.

$$M \in S_m \iff x^2+y^2+z^2-2mz\sqrt{2}+m^2-2=0 \iff x^2+y^2+(z-m\sqrt{2})^2 = m^2+2.$$

En remarquant que $m^2+2 \geq 0$ et en notant $\boxed{\Omega_m \text{ le point de coordonnées } (0,0,m\sqrt{2}) \text{ et } R_m = \sqrt{m^2+2}}$, on trouve que $\boxed{S_m \text{ est la sphère de centre } \Omega_m \text{ de rayon } R_m.}$.

17. Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace.

$$M \in P \cap \mathcal{E} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 + 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - z^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

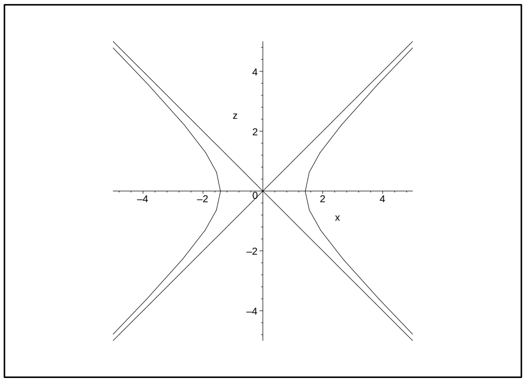
Notons $G = P \cap \mathcal{E}$. Une équation de G dans le plan P est $x^2 - z^2 = 2$, ce qu'on peut encore écrire sous la forme

$$\boxed{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.}$$

On reconnait l'équation réduite dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{k})$ d'une $\boxed{\text{hyperbole}}$ avec $a = b = \sqrt{2}$.
Les asymptotes de G ont pour équations $z = -x$ et $z = x$ dans le plan P. Donc les équations des deux asympotes dans $\mathcal{R}$ sont

$$\boxed{\begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} z = x \\ y = 0. \end{cases}}$$

18.



19. Avec les notations habituelles, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Donc l'excentrité e de cette hyperbole vaut $\boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}}$.

Dans le plan P muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{k})$, les foyers de G ont pour coordonnées $(2, 0)$ et $(-2, 0)$. Les coordonnées des deux foyers dans $\mathcal{R}$ sont donc $\boxed{(2, 0, 0)}$ et $\boxed{(-2, 0, 0)}$.

20. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la droite (D_θ) ayant pour système d'équations cartésiennes

$$(D_\theta) : \begin{cases} x - z\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta \\ y - z\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace.

$$M \in (D_\theta) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - z\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta \\ y - z\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \sqrt{2}\sin\theta + \lambda\cos\theta \\ y = -\sqrt{2}\cos\theta + \lambda\sin\theta \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Sur cette équation paramétrique, on lit un point et un vecteur directeur de la droite (D_θ) :

$$\boxed{\text{Le point } M_\theta \text{ de coordonnées } (\sqrt{2}\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta, 0) \text{ appartient à } (D_\theta).}$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } \vec{d_\theta} \text{ de coordonnées } (\cos\theta, \sin\theta, 1) \text{ dirige } (D_\theta).}$$

21. Soient θ et m deux réels quelconques. La droite (D_θ) est tangente à la sphère S_m si et seulement si $d(\Omega_m, (D_\theta)) = R_m$. Or,

$$d(\Omega_m, (D_\theta)) = \frac{\|\overrightarrow{M_\theta\Omega_m} \wedge \vec{d_\theta}\|}{\|\vec{d_\theta}.\|}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{M_\theta\Omega_m} \wedge \vec{d_\theta}$ sont $\sqrt{2}(\cos\theta - m\sin\theta, \sin\theta + m\cos\theta, -1)$ donc

$$\|\overrightarrow{M_\theta\Omega_m} \wedge \vec{d_\theta}\| = \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 2}.$$

De plus $\|\vec{d_\theta}\| = \sqrt{2}$ donc

$$\boxed{d(\Omega_m, (D_\theta)) = R_m,}$$

ce qui prouve que la droite (D_θ) est tangente à la sphère S_m.
Autre solution : on peut bien entendu aussi démontrer que (D_θ) et S_m ont un unique point d'intersection en résolvant un système.

22. Soient $\theta \in \mathbb{R}$, et un point $M(x,y,z)$ appartenant à la droite (D_θ). Montrons que M appartient à $\mathcal{E}$. Comme $M \in (D_\theta)$,

$$\begin{cases} x = z\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta \\ y = z\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

et un rapide calcul montre que $x^2 + y^2 = z^2 + 2$ donc M appartient à $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{La droite } (D_\theta) \text{ est donc incluse dans } \mathcal{E}.}$$

23. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'ensemble $\mathcal{E}$. On cherche un réel θ tel que

$$\begin{cases} x - z\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta \\ y - z\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

En posant $C = \cos\theta$ et $S = \sin\theta$, le système précédent peut s'écrire

$$\begin{cases} x - zC = S\sqrt{2} \\ y - zS = -C\sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{soit encore} \qquad \begin{cases} zC + S\sqrt{2} = x \\ -C\sqrt{2} + zS = y. \end{cases}$$

Ce système est linéaire en C, S. Le déterminant de ce système $\begin{vmatrix} z & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & z \end{vmatrix}$ vaut $z^2 + 2$ qui est une quantité non nulle. Donc il existe un unique couple (C, S) solution donné par les formules de Cramer :

$$C = \frac{\begin{vmatrix} x & \sqrt{2} \\ y & z \end{vmatrix}}{z^2+2} = \frac{xz - y\sqrt{2}}{z^2+2} \qquad \text{et} \qquad S = \frac{\begin{vmatrix} z & x \\ -\sqrt{2} & y \end{vmatrix}}{z^2+2} = \frac{yz + x\sqrt{2}}{z^2+2}.$$

Or $C^2 + S^2 = \dfrac{(xz - y\sqrt{2})^2 + (yz + x\sqrt{2})^2}{(z^2+2)^2} = \dfrac{x^2z^2 + 2y^2 + y^2z^2 + 2x^2}{(z^2+2)^2} = \dfrac{(z^2+2)(x^2+y^2)}{(z^2+2)^2} = 1$ car $x^2 + y^2 = z^2 + 2$ (puisque $M \in \mathcal{E}$).
Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $C = \cos\theta$ et $S = \sin\theta$. Donc $M \in (D_\theta)$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{il existe } \theta \in \mathbb{R}, \text{ tel que } M \in (D_\theta).}$$

24. Les deux questions précédentes permettent d'affirmer, par double-inclusion, que

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est la réunion des droites } (D_\theta) \text{ lorsque } \theta \text{ varie dans } \mathbb{R}.}$$

Problème II : Analyse

A. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)\,\mathrm{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad \text{car sh est impaire.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2. **(a)** Au voisinage de 0, $\mathrm{sh}(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$.

<u>Limite en $+\infty$:</u> Pour x tendant vers $+\infty$, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers 0^+ et

$$x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} \underset{X\to 0^+}{\sim} 1.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$

<u>Limite en $-\infty$:</u> Par parité, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.}$

(b) Limite en 0 : Pour x tendant vers 0^+, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers $+\infty$ et $x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\operatorname{sh}(X)}{X} = \frac{e^X - e^{-X}}{2X}$. Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^{-X}}{X} = 0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.}$

Par parité de f, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.}$

3. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable. En effet c'est la composée de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et de la fonction sh qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puis par produit de fonctions dérivables, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

4. Pour $X \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(X) = \operatorname{th}(X) - X$. φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\forall X > 0, \quad \varphi'(X) = 1 - \operatorname{th}^2(X) - 1 = -\operatorname{th}^2 X < 0.$$

Donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(X) < \varphi(0)$ soit $\boxed{\operatorname{th}(X) < X.}$

5. Comme la fonction ch est strictement positive, on trouve d'après la question A.4. que f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le tableau de variations suivant (grâce à la parité de f) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$	
	1	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	1

6. Pour obtenir le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \frac{\operatorname{sh}(X)}{X}$, on effectue le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction sh :

$$\operatorname{sh}(X) = X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5).$$

Donc

$$\boxed{\frac{\operatorname{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4).}$$

7. On pose $X = \frac{1}{x}$. Ainsi lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, X tend vers 0. Donc pour X au voisinage de 0, on a d'après la question A.6,

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\operatorname{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4),$$

soit pour x au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{120}.}$

8. La fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de deux fonctions dérivables (fonction f et fonction inverse). De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ce qui prouve que f se prolonge par continuité en 0. En notant F ce prolongement, $F(0) = 1$ et F admet donc le développement limité suivant en 0 :

$$F(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Ainsi F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, donc aussi un développement limité à l'ordre 1 en 0 ce qui prouve que F est dérivable en 0.

Finalement, F étant aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a prouvé que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

B. Tracé d'une courbe paramétrée

9. La fonction x est précisément la fonction f étudiée dans la partie A. Passons à l'étude de la fonction y.
La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a

$$y'(t) = e^{\frac{1}{t}} + t \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}} \left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Le signe de $y'(t)$ est celui de $1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{1/t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} te^{1/t} = -\infty$. Pour obtenir la limite en 0^+ de $y(t)$, on pose $T = 1/t$. Lorsque t tend vers 0^+, T tend vers $+\infty$. Or $te^{1/t} = \dfrac{e^T}{T}$ et $\lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{e^T}{T} = +\infty$ (croissances comparées). Donc $\lim\limits_{t \to 0^+} te^{1/t} = +\infty$.
Et en 0^-, il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{t \to 0^-} te^{1/t} = 0$.
On obtient finalement les tableaux de variations et de signes suivants :

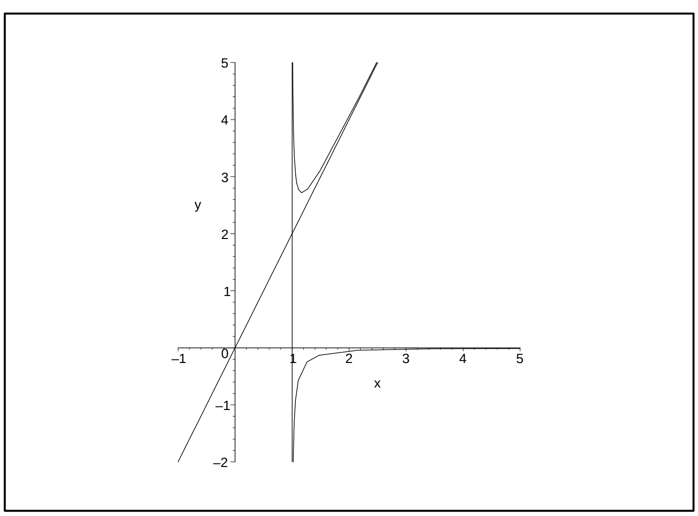
t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\text{sh}(1)$	↘	1
$y'(t)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

10. On a $x(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 1$ et $y(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De plus, $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $y(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
La courbe Γ admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 1.}$ Par ailleurs, d'après le tableau de variations, tous les points M de Γ sont à droite de cette asymptote.
On a $x(t) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} 0$. La courbe $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote horizontale d'équation } y = 0.}$ Les points M de Γ correspondant à un paramètre $t < 0$ sont en dessous de cette asymptote horizontale.
On a $x(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Et $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\text{sh}\left(\frac{1}{t}\right)} = \dfrac{2\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\exp\left(\frac{1}{t}\right) - \exp\left(-\frac{1}{t}\right)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\exp\left(\frac{1}{t}\right)} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 2$. Enfin,

$$y(t) - 2x(t) = t\exp\left(-\frac{1}{t}\right) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Γ admet donc la droite d'équation $\boxed{y = 2x \text{ comme asymptote oblique}}$ et comme $y(t) - 2x(t) \geq 0$ pour $t > 0$ car $t\exp\left(-\frac{1}{t}\right)$ pour $t > 0$, la courbe $\boxed{\Gamma \text{ est au dessus de son asymptote oblique}}$ pour les points M de paramètre $t > 0$.

11.



C. Une équation différentielle

12. On introduit l'équation homogène (E_0) associée : $xy' + y = 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \longmapsto x$ est continue et ne s'annule pas. De plus une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \ln|x|$. Et sur $\mathbb{R}_+^*$, $|x| = x$. Donc les solutions de (E_0) sont $y(x) = \lambda \exp(-\ln x) = \frac{\lambda}{x}$, où λ est un paramètre réel quelconque.

Pour obtenir une solution particulière de (E), on utilise la méthode de variation de la constante. On considère λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors pour $x > 0$, $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$. y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y'(x) = \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2}$. Ainsi

$$y \text{ est solution de } (E) \Longleftrightarrow \forall x > 0,\ \lambda'(x) = \operatorname{ch} x.$$

Prenons par exemple $\lambda(x) = \operatorname{sh} x$ pour tout $x > 0$ soit $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ pour tout $x > 0$. Les solutions de (E) sont la somme de la solution particulière que l'on vient d'exhiber et des solutions de l'équation homogène (E_0). Les solutions de (E) sont donc

$$\boxed{x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\lambda + \operatorname{sh} x}{x} \in \mathbb{R} \quad (\lambda \text{ étant une constante réelle quelconque}).}$$

13. Sur $\mathbb{R}_-^*$, on effectue les mêmes calculs, et on trouve encore que les solutions sont

$$\boxed{x \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto \frac{\mu + \operatorname{sh} x}{x} \in \mathbb{R} \quad (\mu \text{ étant une constante réelle quelconque}).}$$

14. On procède par analyse/synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). Alors, d'après les questions C.12. et C.13. il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu + \operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda + \operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme y est continue en 0 (car dérivable) les limites de y en 0^+ et en 0^- sont finies et égales, ce qui impose que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$. De plus y est continue en 0. Par unicité du prolongement par continuité en 0 de l'application $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ la fonction y est donc égale à la fonction F, définie dans la question $A.8$.

Synthèse : La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après A.8. De plus, sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ donc F est bien solution de (E) sur ces deux intervalles d'après les questions C.12 et C.13. Enfin, $F(0) = 1$ donc en $x = 0$ on a bien $0F'(0) + F(0) = \operatorname{ch} 0$. Finalement, $\boxed{F \text{ est bien l'unique fonction dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

D. Etude d'une suite

15. La fonction f est continue strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donc f réalise une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ appartient à $]1, +\infty[$. Il possède donc un unique antécédent $\underline{\text{dans }]0, +\infty[}$ par la fonction f. On note u_n cet unique antécédent.

16. D'après la question précédente, la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. En notant h la bijection réciproque, la fonction h est continue sur $]1, +\infty[$, strictement monotone et de même monotonie que f sur $]0, +\infty[$. Donc h est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et d'après les limites obtenues pour f, on obtient le tableau de variations suivant

y	1		$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	0

A partir de là, montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $1 + \dfrac{1}{n} \geq 1 + \dfrac{1}{n+1}$ donc $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$. En appliquant la fonction h, qui est strictement décroissante, on trouve que $u_n \leq u_{n+1}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = h\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{y \to 1} h(y) = +\infty$ donc par composition de limites,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, ce qui permet d'utiliser le développement asymptotique obtenu dans la question A.7. et d'obtenir

$$1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n}.$$

D'où

$$\frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{n}$$

soit $\frac{1}{6u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $\frac{6u_n^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, et en prenant la racine carrée, $\frac{\sqrt{6}u_n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où finalement

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}.}$$

E. Une fonction définie par une intégrale

19. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = 2\frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \boxed{\operatorname{sh} 2x.}$

20. Pour tout $x > 0$, $J(x) = \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^{x/2} f(t)\,dt$. En notant u la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ J(x) = u(x) - u(x/2).$$

Or la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction continue f. Par composée, la fonction $x \longmapsto u(x/2)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour $x > 0$, $u'(x) = f(x)$. Donc pour tout $x > 0$,

$$J'(x) = u'(x) - \frac{1}{2}u'\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{4}\operatorname{sh}\left(\frac{2}{x}\right).$$

Or, $\operatorname{sh}\left(\frac{2}{x}\right) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$ d'après la question E.19. Donc pour tout $x > 0$,

$$J'(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \qquad \text{donc} \qquad \boxed{J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].}$$

21. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est strictement positive. Résolvons sur $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation

$$1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0.$$

Celle-ci équivaut à $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$. Soit encore, en remplaçant la fonction ch par son expression à l'aide de la fonction exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \leq 4.$$

On pose $X = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et l'inéquation à résoudre devient $X + \frac{1}{X} \leq 4$, avec $X > 0$. En multipliant par X qui est positif, on obtient l'inéquation équivalente

$$X^2 + 1 \leq 4X,$$

qui est une inéquation du second degré équivalente (après résolution) à $2 - \sqrt{3} \leq X \leq 2 + \sqrt{3}$.
Ainsi $2 - \sqrt{3} \leq \exp\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 + \sqrt{3}$. Donc en appliquant la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient la condition équivalente

$$\ln(2 - \sqrt{3}) \leq \frac{1}{x} \leq \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Or $x > 0$ donc on trouve finalement $x \geq \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$.

En conclusion pour $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}.$$

D'où le tableau de signes suivant, où on a noté $\alpha = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$.

x	0		α		$+\infty$
$J'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

22. En utilisant les limites données par l'énoncé en 0^+ et en $+\infty$, on obtient le tableau de variations suivant

x	0		α		$+\infty$
J	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$J(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

23.