CONCOURS COMMUN 2000

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques

(filière MPSI)

PROBLEME D'ANALYSE

PARTIE I

1. On sait que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$ et que $\cos \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{\cos \in \mathcal{E}.}$$

En particulier, $\mathcal{E}$ n'est pas vide.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) &= \frac{1}{4}\left[(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})\right]\\ &= \frac{1}{4}(2e^{x+y}+2e^{-x-y}) = \frac{1}{2}(e^{x+y}+e^{-(x+y)})\\ &= \operatorname{ch}(x+y).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$. Puisque la fonction ch est paire et que la fonction sh est impaire, on a aussi $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)-\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$. En additionnant ces deux égalités, on obtient

$$\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y).$$

Puisque d'autre part $\operatorname{ch} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a montré que

$$\boxed{\operatorname{ch} \in \mathcal{E}.}$$

3. Soient $f \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_\alpha \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et de plus, pour tout réel x on a

$$f_\alpha(x+y)+f_\alpha(x-y) = f\left(\alpha(x+y)\right)+f\left(\alpha(x-y)\right) = f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y).$$

Ainsi

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (f \in \mathcal{E} \Rightarrow f_\alpha \in \mathcal{E}).}$$

4. **a.** Soit $f \in \mathcal{E}$. $f(0+0)+f(0-0) = 2f(0)f(0)$ s'écrit encore $(f(0))^2 = f(0)$ ou aussi $f(0)(f(0)-1) = 0$. Donc

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ (f \in \mathcal{E} \Rightarrow f(0) \in \{0, 1\}).}$$

b. Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $f(0) = 0$. Pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) = f(x)f(0) = f(x).0 = 0.$$

Donc,

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ ((f \in \mathcal{E} \text{ et } f(0) = 0) \Rightarrow f = 0)\,.}$$

c. Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $f(0) = 1$. Pour tout réel x, on a

$$f(0 + x) + f(0 - x) = 2f(0)f(x) = 2f(x),$$

et donc

$$f(-x) = f(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ ((f \in \mathcal{E} \text{ et } f(0) = 1) \Rightarrow f \text{ paire})\,.}$$

PARTIE II

A. Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $f(0) = 1$.

1. Soit $r > 0$.
a. En posant $u = x + y$, on obtient

$$\boxed{\int_0^r f(x + y)\ dy = \int_x^{x+r} f(u)\ du.}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. De même en posant $v = x - y$, on obtient $\displaystyle\int_0^r f(x - y)\ dy = \int_x^{x-r} f(v)\ (-dv) = \int_{x-r}^x f(v)\ dv$. Par suite,

$$2f(x)\int_0^r f(y)\ dy = \int_0^r 2f(x)f(y)\ dy = \int_0^r f(x + y)\ dy + \int_0^r f(x - y)\ dy = \int_x^{x+r} f(u)\ du + \int_{x-r}^x f(v)\ dv.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x)\int_0^r f(y)\ dy = \int_x^{x+r} f(u)\ du + \int_{x-r}^x f(v)\ dv.}$$

2. **a.** Puisque $f(0) = 1$ et que f est continue en 0, il existe un réel strictement positif r tel que, pour $y \in [0, r]$, on a $f(y) \geq \dfrac{1}{2}$. Mais alors,

$$\int_0^r f(y)\ dy \geq \int_0^r \frac{1}{2}\ dy = \frac{r}{2} > 0.$$

Donc, $\exists r > 0/\ \displaystyle\int_0^r f(y)\ dy > 0$. r est dorénavant fixé de la sorte.

b. Pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\displaystyle\int_0^r f(y)\ dy}\left(\int_x^{x+r} f(u)\ du + \int_{x-r}^x f(v)\ dv\right).$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \int_x^{x+r} f(u)\ du$ et $x \mapsto \int_{x-r}^x f(v)\ dv$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de f.

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
- Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors les fonctions $x \mapsto \int_x^{x+r} f(u)\ du$ et $x \mapsto \int_{x-r}^x f(v)\ dv$ sont de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de f.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

d. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \int_0^x f(u)\, du$. F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Pour tout réel x, on a

$$2f(x)F(r) = F(x+r) - F(x) + F(x) - F(x-r) = F(x+r) - F(x-r).$$

En dérivant cette égalité, on obtient pour tout réel x

$$2f'(x)F(r) = f(x+r) - f(x-r).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ cf'(x) = f(x+r) - f(x-r) \text{ où } c = 2\int_0^r f(y)\, dy > 0.}$$

3. Dérivons une fois de plus cette égalité. Pour tout réel x, on obtient

$$cf''(x) = f'(x+r) - f'(x-r) = \frac{1}{c}\left((f(x+2r) + f(x)) - (f(x) - f(x-2r))\right) = \frac{1}{c}(f(x+2r) + f(x-2r)) = \frac{2}{c}f(x)f(r),$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{2f(r)}{c^2}f(x).}$$

B. Conclusion.

1. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Notons (E_μ) l'équation différentielle $y'' = \mu y$.
- Si $\mu > 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_μ) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\sqrt{\mu}x) + B\,\mathrm{sh}(\sqrt{\mu}x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\mu = 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_μ) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax + B$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\mu < 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_μ) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(\sqrt{-\mu}x) + B\sin(\sqrt{-\mu}x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. Puisque $f(0) = 1$, la question I.4.c. montre que la fonction f est paire. La partie impaire de f est donc nulle.

• Dans le premier cas, f est nécessairement de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x)$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$ et puisque $f(0) = 1$, nécessairement $A = 1$. Réciproquement, d'après I.2., la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est dans $\mathcal{E}$ et donc d'après I.3., pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ est dans $\mathcal{E}$.

• Dans le deuxième cas, f est nécessairement constante (car la fonction $x \mapsto x$ est impaire) puis nécessairement la fonction constante $x \mapsto 1$ qui réciproquement convient.

• Dans le troisième cas, f est nécessairement de la forme $x \mapsto A\cos(\omega x)$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$ et puisque $f(0) = 1$, nécessairement $A = 1$. Réciproquement, d'après I.1., la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dans $\mathcal{E}$ et donc d'après I.3., pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto \cos(\omega x)$ est dans $\mathcal{E}$.

En constatant que $\omega = 0$ fournit la fonction constante 1 et en récupérant la fonction nulle qui est solution, on a montré que

$$\boxed{\mathcal{E} = \{x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x),\ \omega \in \mathbb{R}^+\} \cup \{x \mapsto \cos(\omega x),\ \omega \in \mathbb{R}^+\} \cup \{0\}.}$$

3. Puis

$$\boxed{\mathcal{F} = \{x \mapsto \cos(\omega x),\ \omega > 0\}.}$$

PARTIE III

A.

1. Soit $f \in \mathcal{F}$. D'après la question I.4., $f(0) \in \{0, 1\}$ et si $f(0) = 0$ alors $f = 0$. Donc $f(0) = 1$. Mais alors d'après la question I.4.c., f est paire. f doit s'annuler au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en un réel x_0 nécessairement non nul (puisque $f(0) = 1 \neq 0$). Par parité, f s'annule en x_0 et $-x_0$. L'un de ces deux réels étant strictement positif, on a montré que

$$\boxed{f(0) = 1 \text{ et } f \text{ s'annule au moins une fois sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente) et minorée (par 0). Donc E admet une borne inférieure que l'on note a.

3. Il existe une suite (x_n) d'éléments de E, convergente de limite a. f étant continue en a, on a

$$f(a) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

Donc

$$\boxed{f(a) = 0.}$$

Comme 0 est un minorant de E et que a est le plus grand des minorants de E, on a $a \geq 0$. Comme $f(0) = 1 \neq 0$ et que $f(a) = 0$, on a $a \neq 0$ et finalement

$$\boxed{a > 0.}$$

4. Par définition de a, pour tout x de $[0, a[$, on a $f(x) \neq 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in [0, a[$ tel que $f(x_0) < 0$. Alors, puisque $f(0) > 0$, que $f(x_0) < 0$ et que f est continue sur $[0, x_0]$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que f s'annule au moins une fois dans $[0, x_0]$ et donc dans $[0, a[$. Ceci est exclu et donc

$$\boxed{\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0.}$$

B. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $a = \text{Inf}(E)$.

1. a. Soit $q \in \mathbb{N}$.

$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = f\left(\frac{a}{2^q}\right) + f(0) = f\left(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f\left(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}\right) = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2.$$

Donc,

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2.}$$

b. Notons d'abord que, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) + 1 = 2\cos^2(x)$, la fonction g vérifie les mêmes égalités.

Montrons alors par récurrence que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

- On a $f(a) = 0$ et $g(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $f\left(\frac{a}{2^0}\right) = g\left(\frac{a}{2^0}\right)$.
- Soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$. Alors

$$\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right) = \left[g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2.$$

Maintenant, $0 \leq \frac{a}{2^{q+1}} \leq \frac{a}{2} < a$ et donc, d'après la question III.a.4., $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ mais aussi $0 \leq \omega\frac{a}{2^{q+1}} < \frac{\pi}{2}$ et donc $g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$. On peut alors en déduire que $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).}$$

2. f et g coïncident sur $\{a\dfrac{p}{2^q},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$ et f et g sont paires. Donc f et g coïncident sur D_a.

3. Soit x un réel. Il existe une suite (x_n) d'éléments de D_a, convergente de limite x. Puisque f et g sont continues en x, on a

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to+\infty} x_n) = g(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right).}$$

C. On retrouve alors le résultat de la question II.B.3. (avec $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$).

PROBLEME D'ALGEBRE

PARTIE I : Généralités, exemples

1. a. Soient $(A, B) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$T(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{k,k} + \mu a_{k,k}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{k,k} = \lambda T(A) + \mu T(B).$$

Donc

$$\boxed{T \in E^*.}$$

b. Soit $U \in E$. Soient $(A, B) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$T_U(\lambda A + \mu B) = T\left(U.(\lambda A + \mu B)\right) = T(\lambda U.A + \mu U.B) = \lambda T(U.A) + \mu T(U.B) == \lambda T_U(A) + \mu T_U(B).$$

Donc

$$\boxed{\forall U \in E,\ T_U \in E^*.}$$

c. Soit $U \in E$. On a $\text{Ker}(T_U) = H_U$ et puisque T_U est une forme linéaire sur E, H_U est un sous-espace vectoriel de E.

2. a.

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{la famille } (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) \text{ est la base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

b. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$. Alors

$$U.M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} + m_{1,2} & m_{1,1} + m_{1,2} \\ m_{2,1} + m_{2,2} & m_{2,1} + m_{2,2} \end{pmatrix},$$

puis

$$T_U(M) = m_{1,1} + m_{1,2} + m_{2,1} + m_{2,2}.$$

Donc

$$\boxed{H_U = \left\{ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) /\ m_{1,1} + m_{1,2} + m_{2,1} + m_{2,2} = 0 \right\}.}$$

c. Par exemple $T_U(I_2) = 1 \neq 0$. Ainsi, $\text{Im}(T_U) \neq \{0\}$ et donc $\dim(\text{Im}(T_U)) \geq 1$. Mais d'autre part $\text{Im}(T_U) \subset \mathbb{R}$ et donc $\dim(\text{Im}(T_U)) \leq 1$. Finalement, $\dim(\text{Im}(T_U)) = 1$. D'après le théorème du rang, on peut alors affirmer que

$$\dim(H_U) = \dim(\text{Ker}(T_U)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(T_U)) = 4 - 1 = 3.$$

$$\boxed{\dim(H_U) = 3.}$$

d. La matrice $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant n'est pas nul et la somme des coefficients de A est nulle ce qui montre que $A \in H_U$.

$$\boxed{H_U \text{ est un hyperplan de } E \text{ et } H_U \text{ contient une matrice inversible.}}$$

PARTIE II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. **a.** Soit $A, B) \in E^2$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Le coefficient ligne j, colonne j de la matrice A.B vaut

$$\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j},$$

et donc

$$T(A.B) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j}.$$

$$\boxed{\forall (A, B) \in E^2, \ T(A.B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j}.}$$

b. Soit $A, B) \in E^2$. Posons ${}^tA = (a'_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ où $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ a'_{i,j} = a_{j,i}$. Alors

$$T({}^tA.B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a'_{j,i} b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

$$\boxed{\forall (A, B) \in E^2, \ T({}^tA.B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \quad (I_1).}$$

D'autre part,

$$T(A.B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} a_{j,i} = T(B.A).$$

$$\boxed{\forall (A, B) \in E^2, \ T(A.B) = T(B.A) \quad (I_2).}$$

2. Soit $U \in E$.

a. Si $U = 0$, il est immédiat que $H_U = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Supposons $U \neq 0$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient ligne k, colonne l de la matrice $E_{i,j}$ vaut $\delta_{i,k} \times \delta_{j,l}$ où δ désigne le symbole de Kronecker. D'après la question II.1.a.,

$$T_U(E_{i,j}) = T(U.E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{l,k} \delta_{i,k} \times \delta_{j,l} = u_{j,i}.$$

Puisque $U \neq 0$, il existe $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $u_{j_0,i_0} \neq 0$. Mais alors, $T_U(E_{i_0,j_0}) = u_{j_0,i_0} \neq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall U \in E, \ (U \neq 0 \Rightarrow \exists (i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2 / \ T_U(E_{i_0,j_0}) \neq 0).}$$

T_U est donc une forme linéaire non nulle sur E et, comme à la question I.2.c., on a $\dim(\text{Im}(T_U)) = 1$. Mais alors, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(H_U) = \dim(\text{Ker}(T_U)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(T_U)) = n^2 - 1.$$

$$\boxed{\forall U \in E, \ (U \neq 0 \Rightarrow \dim(H_U) = n^2 - 1).}$$

3. **a.** Soit $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$. D'après la question précédente appliquée au cas particulier $U = E_{i,j}$, $T_{i,j}(E_{k,l})$ est le coefficient ligne l, colonne k de la matrice $E_{i,j}$.

$$\boxed{\forall (i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4, \ T_{i,j}(E_{k,l}) = \delta_{i,l} \times \delta_{j,k}.}$$

b. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^1$, $T_{i,j}$ est une forme linéaire (d'après I.1.b.) et donc un élément de E^*. De plus,

$$\text{card}\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right) = n^2 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty.$$

Pour vérifier que la famille $(T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de E^*, il suffit donc de vérifier que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{(n^2)}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}T_{i,j} = 0 &\Rightarrow \forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}T_{i,j}(E_{k,l}) = 0\\ &\Rightarrow \forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}\delta_{i,l}\times\delta_{j,k} = 0\\ &\Rightarrow \forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \lambda_{l,k} = 0.\end{aligned}$$

On a montré que la famille $(T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre et donc

$$\boxed{\text{la famille } (T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \text{ est une base de } E^*.}$$

4. φ est bien une application de E vers E^*. Montrons que φ est linéaire. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $U,V) \in E^2$.
Pour $A \in E$, on a

$$\begin{aligned}(\varphi(\lambda U + \mu V))(A) &= T_{\lambda U+\mu V}(A) = T\left((\lambda U + \mu V).A\right) = T(\lambda U.A + \mu V.A) = \lambda T(U.A) + \mu T(V.A)\\ &= \lambda T_U(A) + \mu T_V(A) = (\lambda T_U + \mu T_V)(A) = (\lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V))(A)\end{aligned}$$

Donc $\forall A \in E$, $(\varphi(\lambda U + \mu V))(A) = (\lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V))(A)$ ou encore $\varphi(\lambda U + \mu V) = \lambda\varphi(U) + \mu\varphi(V)$. Ainsi, φ est linéaire.

Par φ, l'image de la base canonique $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de E est la famille $(T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ qui est une base de E^* et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de l'espace vectoriel } E \text{ sur l'espace vectoriel } E^*.}$$

5. Soit H un hyperplan de E.
a. $\dim(H) = n^2 - 1$.

b. Puisque A n'est pas nulle, on a $\dim(\text{Vect}(A)) = 1$ et donc

$$\dim(H) + \dim(\text{Vect}(A)) = (n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim(E) < +\infty \quad (*).$$

Puisque A n'est pas dans H, on a aussi

$$H \cap \text{Vect}(A) = \{0\} \quad (**).$$

On sait alors que les égalités $(*)$ et $(**)$ suffisent pour affirmer que

$$\boxed{E = H \oplus \text{Vect}(A).}$$

c. Soit l l'unique forme linéaire telle que $l_{/H} = 0_{/H}$ et $l(A) = 1$. Pour M élément quelconque de E, en posant $M = M_0 + \lambda A$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M_0 \in H$, on a $l(M) = \lambda$. Par suite, $l(M) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow M \in H$. l est une forme linéaire sur E telle que $\text{Ker}(l) = H$.

d. Soit U l'antécédent de l par l'isomorphisme φ. Par définition, $T_U = l$ puis

$$H_U = \text{Ker}(T_U) = \text{Ker}(l) = H.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout hyperplan } H \text{ de } E, \text{ il existe } U \in E \text{ tel que } H = H_U.}$$

PARTIE III : Le résultat général

1. a. On effectue sur les colonnes de P la permutation $C_1 \leftarrow C_n$, $C_2 \leftarrow C_1, \ldots, C_n \leftarrow C_{n-1}$. La matrice obtenue a même rang que P. Comme cette matrice est I_n, on en déduit que $\text{rg}(P) = n$ et donc que

$$\boxed{P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

b. D'après la question II.1.a., en posant $R_r = (a_{i,j})$, on a

$$T_{R_r}(P) = T(R_r.P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}p_{i,j} = \sum_{i=1}^{r} a_{i,i}p_{i,i} = 0.$$

Donc

$$\boxed{P \in H_{R_r}.}$$

2. Soit H un hyperplan de E. D'après les questions II.5.d. et II.2., il existe $U \in E \setminus \{0\}$ tel que $H = H_U$. Notons r $(1 \leq r \leq n)$ le rang de U. On sait qu'il existe deux matrices inversibles S_1 et S_2 telles que $S_1.U.S_2 = R_r$.

Soit $A = S_2PS_1$. Notons tout d'abord que, puisque S_1 et S_2 sont inversibles, A est inversible en tant que produit de matrices inversibles. Ensuite, d'après l'identité (I_2), on a

$$T(U.A) = T(S_1^{-1}.R_r.S_2^{-1}.S_2.P.S_1) = T(S_1^{-1}.R_r.P.S_1) = T(S_1.S_1^{-1}.R_r.P) = T(R_r.P) = 0,$$

et donc A est dans H. On a montré que

$$\boxed{\text{tout hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ contient au moins une matrice inversible.}}$$

