CONCOURS COMMUN 2001

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques

(filière MPSI)

PROBLEME 1

Partie I :

1) Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n, $u_n = au_n + b$. En particulier, pour $n = 0$, on obtient $b = u_1 - au_0$. Ceci démontre l'unicité de b, que l'on peut dorénavant noter b_u.

2) **a)** Soit $u \in \mathbb{R}^n$.

$$u \in E_1^{(0)} \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + b \Leftrightarrow u \text{ est une suite arithmétique.}$$

$$\boxed{E_1^{(0)} \text{ est l'ensemble des suites arithmétiques.}}$$

b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$.

$$u \in E_0^{(0)} \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = b \Leftrightarrow \forall n \geq 1, \ u_n = u_1.$$

$$\boxed{E_0^{(0)} \text{ est l'ensemble des suites de la forme } (u_0, u_1, u_1, u_1, \ldots) \text{ où } u_0 \text{ et } u_1 \text{ sont deux réels.}}$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$.

• Pour tout entier n, on a $0 = a.0 + 0$. Donc, la suite nulle est dans $E_a^{(0)}$ $(b_0 = 0)$.

• Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in (E_a^{(0)})^2$. Il existe $(b_u, b_v) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + b_u$ et $v_{n+1} = av_n + b_v$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(au_n + b_u) + \mu(av_n + b_v) = a(\lambda u_n + \mu v_n) + \lambda b_u + \mu b_v.$$

En posant $b_{\lambda u + \mu v} = \lambda b_u + \mu b_v$, on a encore $\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = a(\lambda u_n + \mu v_n) + b_{\lambda u + \mu v}$. Ainsi, la suite $\lambda u + \mu v$ est dans $E_a^{(0)}$.

$$\boxed{E_a^{(0)} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

4) • Si la suite (x_n) est dans $E_a^{(0)}$, d'après 1), on a nécessairement $b_x = x_1 - ax_0 = 1 - a$. Réciproquement, pour tout entier naturel n,

$$ax_n + b_x = a + (1 - a) = 1 = x_{n+1}.$$

$$\boxed{x \in E_a^{(0)} \text{ et } b_x = 1 - a.}$$

• Si la suite (y_n) est dans $E_a^{(0)}$, d'après 1), on a nécessairement $b_y = y_1 - ay_0 = a - a = 0$. Réciproquement, la suite géométrique (y_n) de raison a vérifie bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = ay_n + 0$.

$$\boxed{y \in E_a^{(0)} \text{ et } b_y = 0.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

• Ainsi, (x, y) est une famille d'éléments de $E_a^{(0)}$. Vérifions que cette famille est libre.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda x + \mu y = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda + \mu a^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + a\mu = 0 \end{cases} \quad \text{(obtenu avec } n = 0 \text{ et } n = 1\text{)}.$$

Le déterminant de ce dernier système vaut $a - 1$ et n'est pas nul puisque $a \neq 1$. Ce système est donc un système de CRAMER homogène et il admet une solution et une seule, la solution $(0, 0)$. On a montré que la famille (x, y) est libre.

$$\boxed{\text{la famille } (x, y) \text{ est une famille libre de l'espace vectoriel } E_a^{(0)}.}$$

5) a) Le système de l'énoncé s'écrit $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + a\mu = u_1 \end{cases}$. Son déterminant vaut $a - 1$ et n'est pas nul. Ce système admet donc un et un seul couple solution fourni par les formules de CRAMER :

$$\boxed{\lambda = \frac{au_0 - u_1}{a - 1} \text{ et } \mu = \frac{u_1 - u_0}{a - 1}.}$$

b) Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_n + \mu y_n$.
• Le résultat est vrai pour $n = 0$ par définition de λ et μ.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$. Alors $u_{n+1} = au_n + b_u = a(\lambda x_n + \mu y_n) + b_u$. Mais

$$b_u = u_1 - au_0 = (\lambda x_1 + \mu y_1) - a(\lambda x_0 + \mu y_0) = \lambda(x_1 - ax_0) + \mu(y_1 - ay_0) = \lambda b_x + \mu b_y.$$

On en déduit que

$$u_{n+1} = a(\lambda x_n + \mu y_n) + (\lambda b_x + \mu b_y) = \lambda(ax_n + b_x) + \mu(ay_n + b_y) = \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_n + \mu y_n.}$$

c) Ainsi, tout élément de $E_a^{(0)}$ est une combinaison linéaire de x et y ou encore la famille (x, y) est une famille génératrice de $E_a^{(0)}$. Puisque la famille (x, y) est également libre d'après la question 4), on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (x, y) \text{ est une base de } E_a^{(0)}.}$$

6) Ce qui précède montre que

$$\boxed{E_a^{(0)} = \{(\lambda + \mu a^n)_{n \in \mathbb{N}},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \text{ et } \dim(E_a^{(0)}) = 2.}$$

Partie II :

1) Montrons tout d'abord que l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_p[X] & \to & \mathbb{R}^{p+1} \\ & P & \mapsto & (P(0), P(1), \dots, P(p)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
• Il est clair que φ est une application linéaire.
• Montrons que φ est injective.
Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Si $P \in \text{Ker}(\varphi)$ alors P est est polynôme de degré au plus p s'annulant en les $p + 1$ réels deux à deux distincts 0, 1,..., p. Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à p ayant au plus p racines, on en déduit que $P = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et donc φ est injective.
• Mais alors, puisque $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p + 1 = \dim(\mathbb{R}^{p+1}) < +\infty$, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit maintenant $u \in E_a^{(p)}$. Il existe $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$. En particulier, pour $k \in [\![0, p]\!]$, on a $P(k) = u_{k+1} - au_k$. Ceci montre que P est nécessairement le polynôme $\varphi^{-1}((u_1 - au_0, u_2 - au_1, \dots, u_{p+1} - au_p))$. Le polynôme P est donc uniquement défini.

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

2) Montrons que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• La suite nulle est dans $E_a^{(p)}$. En effet, si u est la suite nulle, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + P(n)$ où P est le polynôme nul (qui est bien élément de $\mathbb{R}_p[X]$).

• Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in (E_a(p))^2$. Alors, pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned}\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} &= \lambda(au_n + P_u(n)) + \mu(av_n + P_v(n))\\ &= a(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda P_u + \mu P_v)(n).\end{aligned}$$

Comme $\lambda P_u + \mu P_v$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à p, on vient de fournir $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que, pour tout entier naturel n,

$$\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = a(\lambda u_n + \mu v_n) + P(n).$$

Par suite, $\lambda u + \mu v \in E_a^{(p)}$.

Finalement, $E_a^{(p)}$ contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires et donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ E_a^{(p)} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

3) La question 1) (qui établit l'unicité de P) montre que θ est bien une application de $E_a^{(p)}$ vers $\mathbb{R}_p[X]$. Les calculs de la question 2) fournissent au passage :

$$\forall (u, v) \in (E_a^{(p)})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \theta(\lambda u + \mu v) = P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v = \lambda\theta(u) + \mu\theta(v).$$

Donc

$$\boxed{\theta \text{ est une application linéaire.}}$$

4) $\mathrm{Ker}(\theta)$ est constitué des suites u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$ et donc des suites géométriques de raison a. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\theta) = \{\lambda(a)_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(y).}$$

5) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$. $Q_k = (1 - a)X^k +$ termes de degré au plus $k - 1$. Puisque $1 - a \neq 0$, Q_k est de degré k.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(Q_k) = k.}$$

b) D'après ce qui précède, les polynômes $Q_0, Q_1, \ldots, Q_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_p[X]$. De plus, ces polynômes ont des degrés deux à deux distincts et on sait que la famille $(Q_0, \ldots, Q_p)$ est libre. Enfin, $\mathrm{card}(Q_0, \ldots, Q_p) = p+1 = \dim(\mathbb{R}_p[X]) < +\infty$ et donc

$$\boxed{(Q_0, \ldots, Q_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_p[X].}$$

6) **a)** Pour $k \in [\![0, p]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n^{(k)} = n^k$. Pour $k \in [\![0, p]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$x_{n+1}^{(k)} = (n + 1)^k = an^k + Q_k(n) = ax_n + Q_k(n).$$

Ceci montre que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \in E_a^{(p)}$ et que $Q_k = \theta((x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}})$. Donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0, p]\!],\ Q_k \in \mathrm{Im}(\theta).}$$

b) On en déduit que $\mathbb{R}_p[X] = \mathrm{Vect}(Q_0, \ldots, Q_p) \subset \mathrm{Im}(\theta) \subset$
$\mathrm{mbr}_p[X]$ et donc que

$$\boxed{\mathrm{Im}(\theta) = \mathbb{R}_p[X].}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

7) D'après le théorème du rang et les questions 6)b) et 4),

$$\dim(E_a^{(p)}) = \dim(\mathrm{Ker}(\theta)) + \dim(\mathrm{Im}(\theta)) = 1 + p + 1 = p + 2.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \dim(E_a^{(p)}) = p + 2.}$$

8) On a vu à la question 4) que y est dans $E_a^{(p)}$ et à la question 6)a) que $x^{(0)}, \dots, x^{(p)}$ sont dans $E_a^{(p)}$. De plus, $\mathrm{card}(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y) = p + 2 = \dim(E_a^{(p)}) < +\infty$. Par suite, pour montrer que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$, il suffit de démontrer que la famille $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_p, \mu) \in \mathbb{R}^{p+2}$. Supposons que $\lambda_0 x^{(0)} + \dots + \lambda_p x^{(p)} + \mu y = 0$. On prend l'image des deux membres de cette égalité par l'application θ. D'après la question 4), $y \in \mathrm{Ker}(\theta)$ et d'après la question 6)b), $\forall k \in [\![0, p]\!],\ \theta(x^{(k)} = Q_k$. On obtient donc l'égalité

$$\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_p Q_p = 0.$$

D'après la question 5)b), la famille $(Q_0, \dots, Q_p)$ est libre ce qui impose $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$. Il reste $\mu y = 0$ et donc $\mu = 0$ puisque y n'est pas la suite nulle.

On a ainsi montré que la famille $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est libre et donc que

$$\boxed{\text{la famille } (x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y) \text{ est une base de } E_a^{(p)}.}$$

9) La suite (u_n) de l'énoncé est dans $E_2^{(1)}$. D'après la question précédente, $E_2^{(1)} = \mathrm{Vect}(x^{(0)}, x^{(1)}, y)$. Par suite, Il existe trois réels α, β et γ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \beta n + \gamma 2^n.$$

De plus, $u_0 = -2$ puis $u_1 = 2u_0 - 0 + 7 = 3$ puis $u_2 = 6 - 2 + 7 = 11$. Donc, α, β et γ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} \alpha + \gamma = -2 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 3 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 11 \end{array}\right.$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \gamma = -2 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 3 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma = -2 - \alpha \\ \alpha + \beta + 2(-2 - \alpha) = 3 \\ \alpha + 2\beta + 4(-2 - \alpha) = 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma = -2 - \alpha \\ -\alpha + \beta = 7 \\ -3\alpha + 2\beta = 19 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma = -2 - \alpha \\ \beta = 7 + \alpha \\ -3\alpha + 2(7 + \alpha) = 19 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -5 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -5 + 2n + 3.2^n.}$$

Partie III :

1) • Les résultats des questions II.1), II.2) et II.3) restent valables.

• $\mathrm{Ker}(\theta)$ est constitué des suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 0$. $\mathrm{Ker}(\theta)$ est donc l'ensemble des suites constantes. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Vect}(x^{(0)}.$$

• Si $a = 1$, $Q_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, $Q_k = kX^{k-1}$+termes de degré au plus $k - 2$ et donc $\deg(Q_k) = k - 1$. Mais alors comme en II.5)b), $(Q_1, \dots, Q_{p+1})$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$ puis comme en II.7) et II.8), $\dim(E_1^{(p)}) = p + 2$ et une base de $E_1^{(p)}$ est $(x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)}, x^{(0)})$ ou aussi $(x^{(k)})_{0 \leq k \leq p}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ E_1^{(p)} = \mathrm{Vect}(x^{(k)})_{0 \leq k \leq p}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

2) Première solution. La suite (u_n) de l'énoncé est dans $E_1^{(1)}$. D'après la question précédente, $E_1^{(1)} = \text{Vect}(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$. Par suite, Il existe trois réels α, β et γ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2.$$

De plus, $u_0 = -2$ puis $u_1 = -2 - 0 + 1 = -1$ puis $u_2 = -1 - 6 + 1 = -6$. Donc, α, β et γ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\alpha = -2\\ \alpha + \beta + \gamma = -1\\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = -6\end{array}\right.$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = -2\\ \alpha + \beta + \gamma = -1\\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = -6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = -2\\ \beta + \gamma = 1\\ \beta + 2\gamma = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = -2\\ \gamma = -3\\ \beta = 4\end{array}\right.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -3n^2 + 4n - 2.}$$

Deuxième solution. Pour tout entier naturel non nul, on a

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = -2 + \sum_{k=0}^{n-1}(-6k + 1) = -2 - 6\frac{n(n-1)}{2} + n = -3n^2 + 4n - 2.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

PROBLEME 2

Partie I :

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_x^y e^t \, dt = 1 \Leftrightarrow e^y - e^x = 1 \Leftrightarrow e^y = 1 + e^x \Leftrightarrow y = \ln(1 + e^x) \text{ (pour tout réel } x, \text{ on a } e^x > 0).$$

2) La fonction $x \mapsto 1 + e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right) = \ln(1 + e^{-x}).$$

Donc d'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ ce qui montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $f(x) - x > 0$ ce qui montre que la courbe $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Quand x tend vers 0,

$$f(x) = \ln(1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \ln(2) + \ln(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)) = \ln(2) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$$
$$= \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

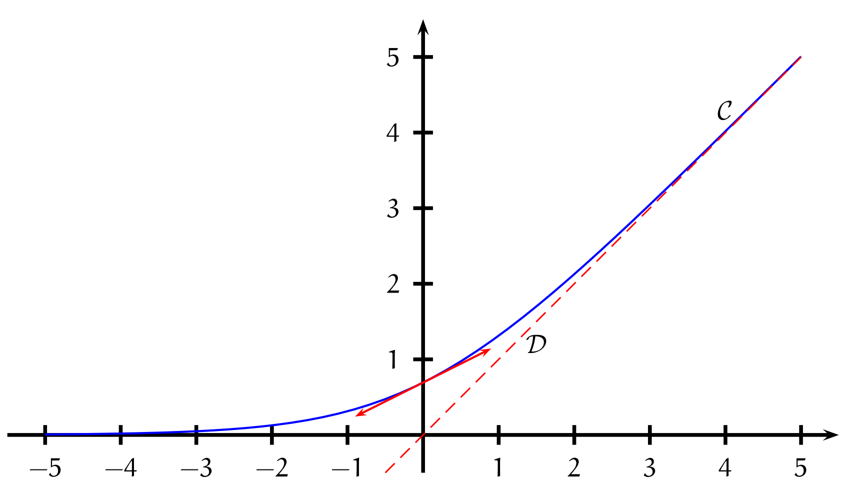
$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).}$$

En particulier, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 : $f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} + o(x)$. Donc

$$\boxed{\text{une équation de la tangente à } \mathcal{C} \text{ au point d'abscisse } 0 \text{ est } y = \ln(2) + \frac{x}{2}.}$$

De plus, quand x tend vers 0, $f(x) - (\ln(2) + \frac{x}{2}) = \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. Cette différence est localement du signe de $\frac{x^2}{8}$ c'est-à-dire positive. La courbe $\mathcal{C}$ est donc localement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

5) Représentation graphique de f.



 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

Partie II :

1) a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_x^y \varphi(t)\,dt = \int_x^y \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}(\text{Arctan}\,y - \text{Arctan}\,x) < \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$$

Donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \int_x^y \varphi(t)\,dt < 1.}$$

b) En particulier $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt \neq 1$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (E_x) \text{ n'a pas de solution.}}$$

c) Dans cet exemple $\ell = 0$.

2) Pour x réel donné, l'équation (E_x) s'écrit encore $\Phi_x(y) = 1$.

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction Φ_x est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}$, et de plus $\Phi_x' = \varphi$.

Puisque φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_x \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Φ_x réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{-\infty} \Phi_x, \lim\limits_{+\infty} \Phi_x\right[$.

b) Si $\ell = +\infty$, il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$, $\varphi(t) > 1$. Dans ce cas, $A = 1$ convient.

Si $\ell \in]0, +\infty[$, il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$, $\varphi(t) > \ell - \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2} > 0$. Dans ce cas, $A = \dfrac{\ell}{2}$ convient.

On a montré dans tous les cas que

$$\boxed{\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \exists A > 0 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ (t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geq A).}$$

c) Soit x un réel. Pour tout réel u supérieur ou égal à t_0, on a

$$\Phi_x(u) = \int_x^{t_0} \varphi(t)\,dt + \int_{t_0}^u \varphi(t)\,dt \geq \int_x^{t_0} \varphi(t)\,dt + A(u - t_0).$$

Comme $A > 0$, on en déduit que $\lim u{+}\infty \Phi_x(u) = +\infty$ et en particulier, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists u \in \mathbb{R} /\ \Phi_x(u) > 1.}$$

d) Soient $x \in \mathbb{R}$ puis u un réel tel que $\Phi_x(u) > 1$. Puisque Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_x) admet au plus une solution. Puisque Φ_x est continue sur $\mathbb{R}$, que $\Phi_x(x) = 0 < 1$ et que $\Phi_x(u) > 1$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation (E_x) a au moins une solution. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{l'équation } (E_x) \text{ a une solution et une seule dans } \mathbb{R}.}$$

Partie III :

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

1) On a vu à la question 3)a) que la fonction Φ_0 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, \lim\limits_{+\infty}\Phi_0[=]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \text{ solution de } (E_x) \Leftrightarrow \int_x^{f(x)} \varphi(t)\ dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^{f(x)} \varphi(t)\ dt - \int_0^x \varphi(t)\ dt = 1$$
$$\Leftrightarrow \Phi_0(f(x)) = \Phi_0(x) + 1 \Leftrightarrow f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1).}$$

2) D'après la question 3)a), la fonction Φ_0 est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction Φ_0^{-1} est continue et strictement croissante sur $\Phi_0(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \Phi_0(x) + 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \Phi_0^{-1}(y)$ est continue et strictement croissante sur $]\lim\limits_{-\infty}\Phi_0, +\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

3) **a)** φ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc Φ_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi_0' = \varphi$.
Φ_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi_0' = \varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc Φ_0^{-1} est de classe C^1 sur $\Phi_0(\mathbb{R})$ et

$$(\Phi_0^{-1})' = \frac{1}{\Phi_0' \circ \Phi_0^{-1}}.$$

Mais alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = (\Phi_0 + 1)'(x) \times \frac{1}{\Phi_0'(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1))} = \frac{\Phi_0'(x)}{\Phi_0'(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1))} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.}$$

b) La fonction f est toujours continue sur $\mathbb{R}$.

Notons V le voisinage de $f(x_0)$ considéré dans l'énoncé. Puisque f est continue en x_0, il existe un voisinage U de x_0 tel que si x est dans U, $f(x)$ est dans V.

Le travail précédent reste presque entièrement valable : f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U privé de x_0 et pour x dans U et différent de x_0, on a $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$.

φ est continue en x_0 et donc, quand x tend vers x_0, $\varphi(x)$ tend vers $\varphi(x_0) > 0$. D'autre part, $\varphi(f(x))$ tend vers $\varphi(f(x_0)) = 0$ en restant strictement positif. On en déduit que

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty.$$

D'après un théorème classique d'analyse, on peut affirmer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à la droite (Oy).

4) Soit $\varepsilon > 0$.

a) Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, il existe un réel a tel que, pour $t \geq a$, on a $\varphi(t) \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

b) Notons tout d'abord que, pour x réel donné, puisque $\int_x^{f(x)} \varphi(t)\ dt = 1 > 0$ et que φ est positive, on a nécessairement $f(x) \geq x$ (si $f(x) < x$, alors $\displaystyle\int_x^{f(x)} \varphi(t)\ dt \leq 0$).

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq x.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

Soit alors x un réel supérieur ou égal à a. On a ainsi $a \leq x \leq f(x)$ et donc

$$1 = \int_x^{f(x)} \varphi(t)\ dt \geq \int_x^{f(x)} \frac{1}{\varepsilon}\ dt = \frac{1}{\varepsilon}(f(x) - x) = \frac{1}{\varepsilon}|f(x) - x|,$$

et donc

$$|f(x) - x)| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}/\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (x \geq a \Rightarrow |f(x) - x| \leq \varepsilon),$$

et donc que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0.}$$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } +\infty.}$$

5) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les expressions $\dfrac{1}{\ell + u}$ et $\dfrac{1}{\ell - u}$ tendent vers $\dfrac{1}{\ell}$ quand u tend vers 0, on peut trouver un réel ε' strictement positif et strictement plus petit que ℓ tel que

$$\frac{1}{\ell} - \varepsilon < \frac{1}{\ell + \varepsilon'} < \frac{1}{\ell - \varepsilon'} < \frac{1}{\ell} + \varepsilon.$$

Puisque φ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, il existe un réel a tel que, pour $t \geq a$, on a $\ell - \varepsilon' \leq \varphi(t) \leq \ell + \varepsilon'$.

Soit x un réel supérieur ou égal à a. Puisque $f(x) \geq x$, on a

$$(f(x) - x)(\ell - \varepsilon') = \int_x^{f(x)} (\ell - \varepsilon')\ dt \leq \int_x^{f(x)} \varphi(t)\ dt = 1 \leq \int_x^{f(x)} (\ell + \varepsilon')\ dt = (f(x) - x)(\ell + \varepsilon'),$$

et donc

$$\frac{1}{\ell + \varepsilon'} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{\ell - \varepsilon'} \text{ (puisque } \ell - \varepsilon' > 0).$$

Par définition de ε', on a encore

$$\frac{1}{\ell} - \varepsilon < f(x) - x < \frac{1}{\ell} + \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}/\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ (x \geq a \Rightarrow \frac{1}{\ell} - \varepsilon < f(x) - x < \frac{1}{\ell} + \varepsilon),$$

et donc que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \frac{1}{\ell}.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x + \frac{1}{\ell} \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } +\infty.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

6) **a)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x,y) \in \Gamma &\Leftrightarrow \int_x^y \varphi(t)\ dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-x}^{-y} \varphi(-u)\ (-du) = 1 \text{ (en posant } u = -t)\\ &\Leftrightarrow \int_{-y}^{-x} \varphi(u)\ du = 1 \text{ (car } \varphi \text{ est paire)}\\ &\Leftrightarrow (-y, -x) \in \Gamma.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ((x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow (-y,-x) \in \Gamma).}$$

b) On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x \text{ est axe de symétrie de } \Gamma.}$$

Partie IV :

1) Pour tout réel x, $\varphi(x) = (x^2 - 1)^2$. φ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et s'annule en -1 et 1. Enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. La fonction φ vérifie donc les hypothèses du problème.

2) • Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et s'annule en -1 et 1, la question III.2) montre que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, la question III.4)b) montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

• Puisque φ est paire, la question III.6) montre que la droite d'équation $y = -x$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

• Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$, on a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

• Il existe un réel x_0 et un seul tel que $f(x_0) = 1$. Comme $\int_0^1 (t^2 - 1)^2\ dt = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{3} + 1 = 1 - \dfrac{7}{15} < 1$, on a $x_0 < 0$ et comme $\int_0^1 (t^2 - 1)^2\ dt = 2(1 - \dfrac{7}{15}) = \dfrac{16}{15} > 1$, on a $x_0 > -1$. On trouve encore $\int_{-0,6}^1 (t^2 - 1)^2\ dt = 1,004... > 1$ et $\int_{-0,5}^1 (t^2 - 1)^2\ dt = 0,9... < 1$ Donc

$$-0,6 < x_0 < -0,5.$$

De même, Il existe un réel x_1 et un seul tel que $f(x_1) = -1$. Comme $\int_{-1,8}^{-1} (t^2 - 1)^2\ dt = 1,3... > 1$ et $\int_{-1,7}^{-1} (t^2 - 1)^2\ dt = 0,7... < 1$, on a

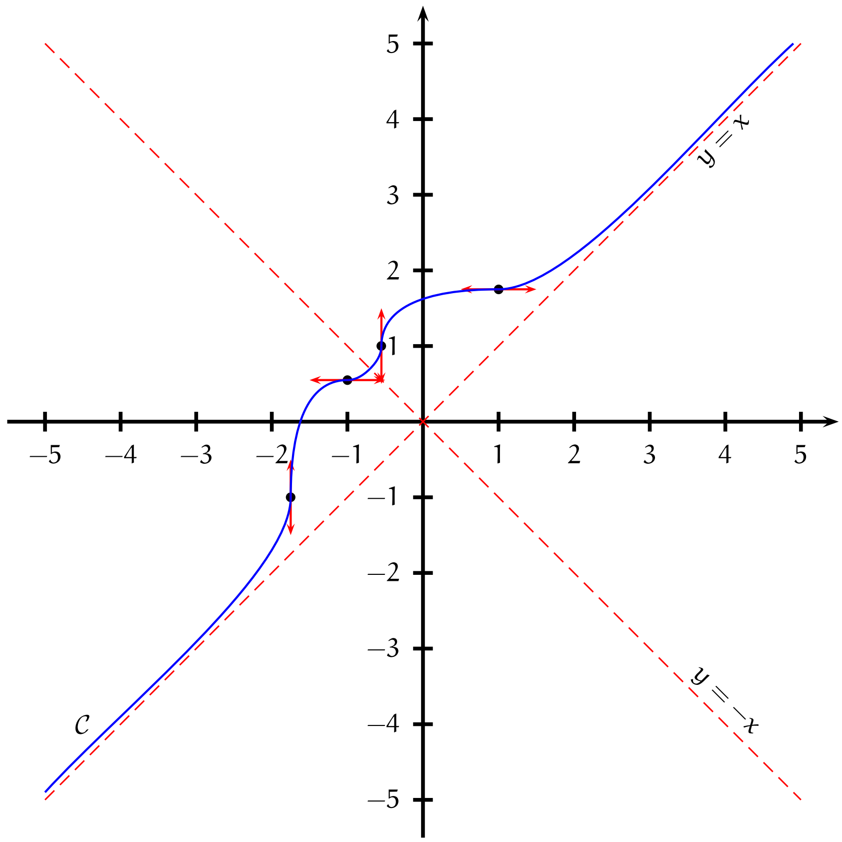
$$-1,8 < x_1 < -1,7.$$

D'après la question III.3)b), $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à (Oy) aux points $(x_1, -1)$ et $(x_0, 1)$.

• φ s'annule en -1 et 1 et d'après la question III.3)a), $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à (Ox) aux points $(-1, f(-1))$ et $(1, f(1))$, ces points étant bien sûr les symétriques des points précédents par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Voir graphique page suivante.

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.



 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.