Corrigé du Premier problème

Partie A.

$$f(t)=e^{-t}.\cos(t)$$

1. *Etudier, sur l'intervalle* $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ *, les variations de la fonction f .*

$D_f = \mathbf{R}$, f est continue, dérivable d'après les théorèmes généraux ; $f'(t) = -e^{-t}(\sin t + \cos t)$

T	$-\pi/2$		$-\pi/4$		$3\pi/4$		$3\pi/2$
f '(t)		+	0	–	0	+	
f(t)	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$	↘	$\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{-3\pi/4}$	↗	0

2. *Exprimer* $f(t+2k\pi)$ *en fonction de f(t) pour* $k\in \mathbf{Z}$, et $t\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

En déduire les variations de f sur $\left[\frac{-\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$

$\frac{f(t+2k\pi)}{f(t)}=e^{-2k\pi}$: les ordonnées sont multipliées par $e^{-2k\pi}>0$, les variations sur $\left[\frac{-\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ sont identiques à celles ci-dessus, mais les 2 extremums sont multipliés par $e^{-2k\pi}$

3. *Soient u et v les fonctions définies sur **R** par : $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$; (C_1) et (C_2) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *. Soit encore (C) la courbe représentative de f dans* $(O,\vec{i},\vec{j})$*. Déterminer les points d'intersection de (C) et (C_1) puis de (C) et (C_2) ; que dire alors de la limite de la fonction f en* $-\infty$ *.*

$(C)\cap(C_1)$: $\cos(t)=1 \Leftrightarrow t=2k\pi$; $y=e^{-2k\pi}$

$(C)\cap(C_2)$: $\cos(t)=-1 \Leftrightarrow t=\pi+2k\pi$; $y=-e^{-\pi-2k\pi}$

Posons $u_k=-2k\pi$ et $v_k=-\pi-2k\pi$; $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=-\infty$ et $\lim\limits_{k\to\infty}v_k=-\infty$; si f admet une limite L en $-\infty$ alors $f(u_k)$ et $f(v_k)$ admettent la même limite finie L or ces 2 limites sont $\pm\infty$
donc f n'admet pas de limite en $-\infty$.

4. *Comparer les tangentes à (C) et (C_1) aux points d'intersection trouvés à la question précédente ; faire de même pour (C) et (C_2).*

$(C)\cap(C_1)$: $t_k=2k\pi$; $y_k=e^{-2k\pi}$; sur (C) $y'_k=-e^{-2k\pi}$, de même sur (C_1)

$(C)\cap(C_2)$: $t_k=\pi+2k\pi$; $y_k=-e^{-\pi-2k\pi}$; sur (C) $y'_k=e^{-\pi-2k\pi}$, de même sur (C_2)

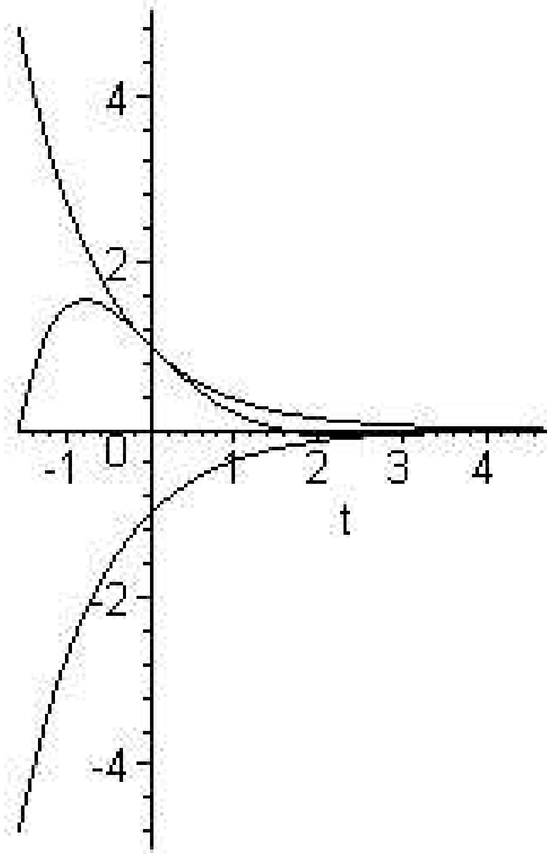
donc dans les 2 cas les tangentes sont identiques. (les équations des tangentes ne sont pas demandées)

5. *Etudier la limite de f en* $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} u(t)\le f(t)\le v(t) \\ \lim\limits_{+\infty}u(t)=\lim\limits_{+\infty}v(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty}f(t)=0$$ d'après le théorème « des gendarmes »

6.*Utiliser ce qui précède pour représenter graphiquement (C) , (C_1) et (C_2) sur* $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$*.On pourra* *utiliser les valeurs numériques suivantes:* $e^{\frac{-\pi}{4}} \approx 0{,}46$ $\quad e^{\frac{\pi}{4}} \approx 2{,}19$ $\quad e^{\frac{-3\pi}{4}} \approx 0{,}09$ $\quad e^{-\pi} \approx 0{,}04$

$e^{\frac{-\pi}{2}} \approx 0{,}21$ $\quad e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4{,}81$ $\quad e^{\frac{-3\pi}{2}} \approx 0{,}01$ $\quad \sqrt{2} \approx 1{,}41$



Il faut être vigilent sur l'extremum en $-\pi/4$, les intersections avec Ox en $\pm\pi/2$, l'intersection de © et (C_1) en 0 ; le reste ne peut guère être distinct.

7.*Pour tout entier naturel k on pose :* $a_k = \int_{\frac{-\pi}{2}+k\pi}^{\frac{-\pi}{2}+(k+1)\pi} e^{-t}.\cos(t).dt$ *Calculer cette intégrale (on pourra utiliser deux intégrations par parties).*

on pose $u = e^{-t}$ et $dv = \cos(t).dt$ ….. $a_k = \left[e^{-t}.\sin(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} + \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} e^{-t}.\sin(t).dt$;

on pose $u = e^{-t}$ et $dv = \sin(t).dt$ ..... $a_k = \left[e^{-t}.\sin(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} + \left[-e^{-t}.\cos(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} - a_k$

le 2nd crochet est nul et donc $2\,a_k = \left[e^{-t}.\sin(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi}$

cette expression dépend de la parité de k :

si k est pair : $a_k = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{\pi}{2}-(k+1)\pi} + e^{\frac{\pi}{2}-k\pi}\right]$ et si k est impair : $a_k = \frac{-1}{2}\left[e^{\frac{\pi}{2}-(k+1)\pi} + e^{\frac{\pi}{2}-k\pi}\right]$

En résumé : $a_k = \frac{(-1)^k}{2}\left[e^{\frac{-\pi}{2}-k\pi} + e^{\frac{\pi}{2}-k\pi}\right] = \frac{e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.\left(-e^{-\pi}\right)^k$

8. *Montrer que* $(a_n)_{n\in N}$ *est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.*

D'après la question précédente (a_k) est une suite géométrique, $a_0 = \dfrac{e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ et $q = \left(-e^{-\pi}\right)$

9. *On pose:* $\forall k \in \mathbf{N}$, $b_k = |a_k|$ *; calculer* $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ *en fonction de n, puis étudier la limite de* (s_n) *quand n tend vers* $+\infty$ *. Interpréter géométriquement ce résultat.*

$b_k = \dfrac{e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.\left(e^{-\pi}\right)^k$ est une suite géométrique, $b_0 = a_0 = \dfrac{e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ et $q = e^{-\pi}$

$s_n = \dfrac{e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.\dfrac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}$ comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Comme $0 \le e^{-\pi} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{-(n+1)\pi} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.\dfrac{1}{1-e^{-\pi}} = \dfrac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.\dfrac{e^{\pi/2}}{2}$

(la dernière expression n'est pas exigée)

Ce nombre représente la somme des aires des parties limitées par la courbe et l'axe Ox.

Partie B.

$t \in [0,+\infty[$ $\quad \begin{cases} x = e^{-t}\cos(t) \\ y = e^{-t}\sin(t) \end{cases}$

10. *Déterminer les vecteurs vitesse* $\overrightarrow{V(t)}$ *et accélération* $\overrightarrow{A(t)}$ *à la date t.*

$\vec{V}(t) : \begin{cases} x'(t) = e^{-t}\left[-\sin(t) - \cos(t)\right] \\ y'(t) = e^{-t}\left[-\sin(t) + \cos(t)\right] \end{cases}$ $\qquad \vec{A}(t) : \begin{cases} x''(t) = 2e^{-t}.\sin(t) \\ y''(t) = -2e^{-t}.\cos(t) \end{cases}$

11. *Exprimer* $\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|$ *en fonction de t.*

$\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\| = e^{-t}$

12. *Démontrer que l'angle* $\varphi = \left(\overrightarrow{OM}, \vec{V}\right)$ *que fait le vecteur* $\overrightarrow{OM(t)}$ *avec le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V(t)}$ *à la date t est constant et en donner une mesure.*

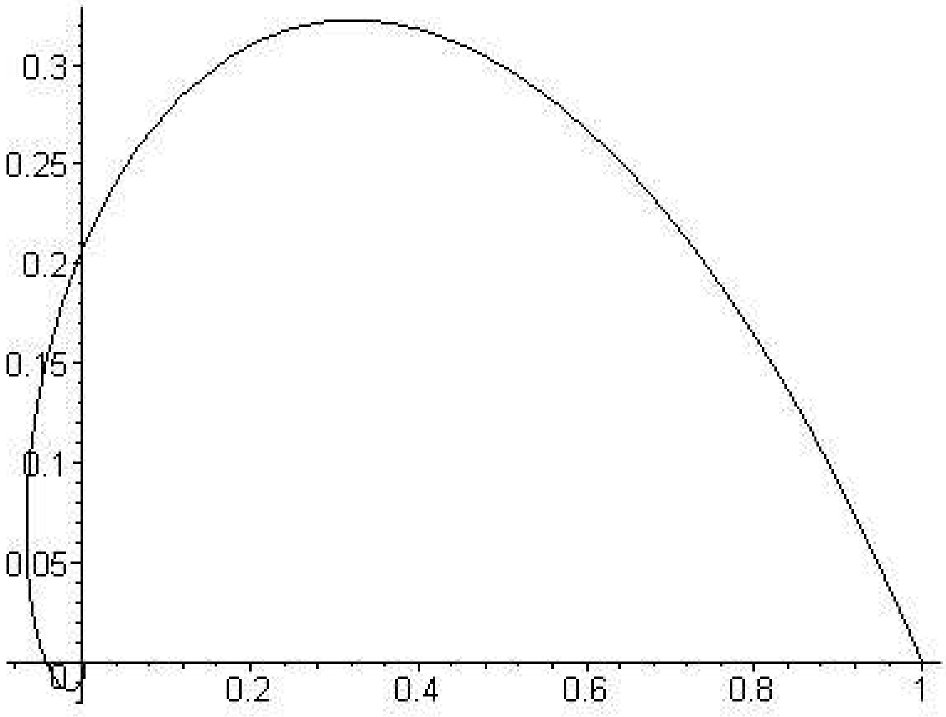
$\sin\varphi = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{OM}, \vec{V}\right)}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|} = \ \ldots\ldots\ldots = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ et $\qquad \cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{OM}.\vec{V}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|} = \ \ldots\ldots\ldots = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

et donc $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

13. *Donner une équation polaire de la courbe puis la représenter pour* $t \in [0,2\pi[$.
(On ne demande pas d'étude supplémentaire)

Equation polaire : $\rho = e^{-t}$

On demande juste un tracé point par point, au vu des résultats ci-dessus.



Partie C.

Soit E = $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique. Pour tout réel t, on appelle F_t l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est : $M_t = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) & -e^{-t}\sin(t) \\ e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}$

14. *Déterminer la nature de* F_π.

$$M_\pi = \begin{pmatrix} -e^{-\pi} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi} \end{pmatrix} \Rightarrow F_\pi \text{ est l'homothétie de rapport } \left(-e^{-\pi}\right)$$

15. *Montrer que F_t est la composée de deux endomorphismes simples de E, dont on donnera les éléments caractéristiques. (On peut utiliser soit le cours d'algèbre linéaire, soit les complexes)*

$$M_t = e^{-t}.\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

et F_t apparaît donc comme produit d'une homothétie de rapport e^{-t} et d'une rotation d'angle t .

Avec les complexes : z' = x'+ iy' $= e^{-t}$ [(x.cos(t) - y.sin(t)) + i.(x.sin(t) + y.cos(t))]
$= e^{-t}$ [x(cos(t) + i.sin(t)) + y(-sin(t)) + i.cos(t))]
$= e^{-t}$ [x(cos(t) + i.sin(t)) + i.y (cos(t) + i.sin(t))]
$= e^{-t}$ [cos(t) + i.sin(t)] (x + i.y)

même conclusion.

16. *Soit $\mathcal{F} = \{ F_t \,, t \in \mathbb{R} \}$: ensemble des endomorphismes F_t , quand t décrit $\mathbb{R}$. Montrer que la composition des applications, notée o, est interne sur $\mathcal{F}$, puis montrer que ($\mathcal{F}$, o) est un groupe isomorphe au groupe ($\mathbb{R}$,+).*

$M_t \times M_u = M_{t+u} \Rightarrow F_t \circ F_u = F_{t+u}$ et donc la loi o est interne ; on vérifie facilement que la loi o est associative, que Id = F_0 est l'élément neutre, et que $(F_t)^{-1} = F_{-t}$. (Bien sûr la démonstration par transport de structure sera acceptée)

M : $\mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{F}$

t $\longrightarrow F_t$ est un morphisme (voir ci-dessus) , c'est aussi une bijection : surjective par construction, et injective car : $M_t = M_u \Rightarrow F_t = F_u \Rightarrow \begin{cases} e^{-t}\cos t = e^{-u}\cos u \\ e^{-t}\sin t = e^{-u}\sin u \end{cases} \Rightarrow e^{-t}(\cos t + i\sin t) = e^{-u}(\cos u + i\sin u)$

et les 2 complexes ont donc même module et même argument : t = u

Corrigé du deuxième problème

M_2 : ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ; $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *la matrice nulle, et* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice unité .On rappelle que (M_2 , + , .) est un espace vectoriel réel et que (M_2 , + , $\times$) est un anneau.*

Partie A.

A *est une matrice fixée de M_2, différente de I et* θ, *on considère l'application f de M_2 vers lui-même définie par :* $f : M \mapsto f(M) = M \times A - A \times M$

1.*Quelle est la dimension de M_2 ? (On ne demande pas de justifier cette réponse)*
dim M_2 = 4

2.*Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel M_2.*
Pour toutes matrices M et N de M_2 et tout réel k :
f(kM+N)= (kM+N)$\times$A - A$\times$ kM+N)= . . . = k.f(M) + f(N)
d'autre part f(M)$\in$ M_2

3. *Soit* $K = \{ M \in M_2 \mid A \times M = M \times A \}$. *Montrer que K est un sous-espace vectoriel de (M_2 , + , .).*
K est le noyau de f, donc est un sous-espace vectoriel.

4.*Montrer que I et A appartiennent à Ker f.*
$f(I) = \theta \Rightarrow I \in \operatorname{Ker} f$; $f(A) = \theta \Rightarrow A \in \operatorname{Ker} f$

5. *Montrer que Ker f est stable pour la multiplication des matrices, c'est à dire*
$A \in \operatorname{Ker} f$ et $B \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow A \times B \in \operatorname{Ker} f$ *(La démonstration sera détaillée)*

$$\begin{aligned} f(M\times N) = (M\times N)\times A - A\times(M\times N) &= (M\times N)\times A - (A\times M)\times N \quad \text{: associativité de } \times \\ &= (M\times N)\times A - (M\times A)\times N \quad \text{: car } M\in \operatorname{Ker} f \\ &= (M\times N)\times A - M\times(A\times N) \quad \text{: associativité de } \times \\ &= (M\times N)\times A - M\times(N\times A) \quad \text{: car } N\in \operatorname{Ker} f \\ &= (M\times N)\times A - (M\times N)\times A \quad \text{: associativité de } \times \\ &= \theta \text{ donc } M\times N \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

6.*Montrer que (Ker f , + , $\times$) est un anneau.*
Ker f est un sous-espace vectoriel donc un sous-groupe additif : on a aussi démontré que Ker f est stable pour la multiplication, et que $I \in \operatorname{Ker} f$, donc Ker f est un sous-anneau de M_2

Partie B.

On pose maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *une matrice quelconque de M_2 .*

7.*Calculer f(M).*
après calcul f(M) = $\begin{pmatrix} -b & a+c-d \\ -b & b \end{pmatrix}$

8.a) *Montrer que Ker f est le sous-espace vectoriel engendré par I et A.*

$$M \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a+c-d = 0 \Leftrightarrow d = a+c \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a+c \end{pmatrix} = a.I + c.A \Leftrightarrow M \in \operatorname{Vect}(I, A)$$

donc Ker f = Vect (I,A)

8.b) *Trouver une base de Ker f et préciser la dimension de Ker f ainsi que le rang de f.*

(I,A) est donc générateur de Ker f, reste à montrer que (I,A) forme un système libre :

$$x.I + y.A = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$$

donc (I,A) est une base de Ker f , dim (Ker f)=2 et dim(Im f)=rang f = 4-2 = 2 (théorème du rang)

9. *Déterminer A^n pour tout $n \in$ **N***.*

On calcule $A^2 = A$ et par une récurrence évidente $A^n = A$

10. *Soit N = x.I + y.A un élément de Ker f ; déterminer N^n pour tout $n \in$ **N***.*

I et A commutent de façon évidente, donc xI et yA aussi ; on peut donc utiliser le binôme de Newton.

$$N^n = (xI + yA)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} I^i A^{n-i} \text{ or } A^{n-i} = A \text{ si } n < I \text{ d'où } N^n = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\right].A + \binom{n}{n}.x^n.I$$

enfin : $N^n = x^n I + [(x+y)^n - x^n].A$

11. *Résoudre dans Ker f l'équation : $N^2 = I$.*

$$N^2 = \begin{pmatrix} x^2 & y^2 + 2xy \\ 0 & (x^2+y)^2 \end{pmatrix} = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 + 2xy = 0 \\ (x+y)^2 = 1 \end{cases}$$

de (1) on tire x=1 ou x=-1 ; de (2) on tire y =0 ou –2 si x=1 et y=0 ou 2 si x=-1 ; on vérifie les 4 couples dans (3) ; les 4 solutions sont donc I , -I , I-2A et –I+2A

Partie C.

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par s l'application de (P) vers lui-même qui au point m de coordonnées (x , y) fait correspondre le point m' de coordonnées (x' , y'), définies par : $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -y \end{cases}$

12. *Calculer s o s , puis reconnaître s et préciser ses éléments caractéristiques.*

s o s = Id , éventuellement en observant que la matrice de s est I-2A est solution du 11°, sinon calcul simple.
s est donc une symétrie, le point O est invariant de façon évidente.
On trouve comme invariant la droite y=0, c'est à dire Ox (1ère bissectrice)
On cherche les vecteurs transformés en leur opposés dans l'endomorphisme associé (il a la même expression), on trouve la droite y=x, c'est à dire la 1ère bissectrice.
s est donc la symétrie par rapport à Ox, de direction la 1ère bissectrice.

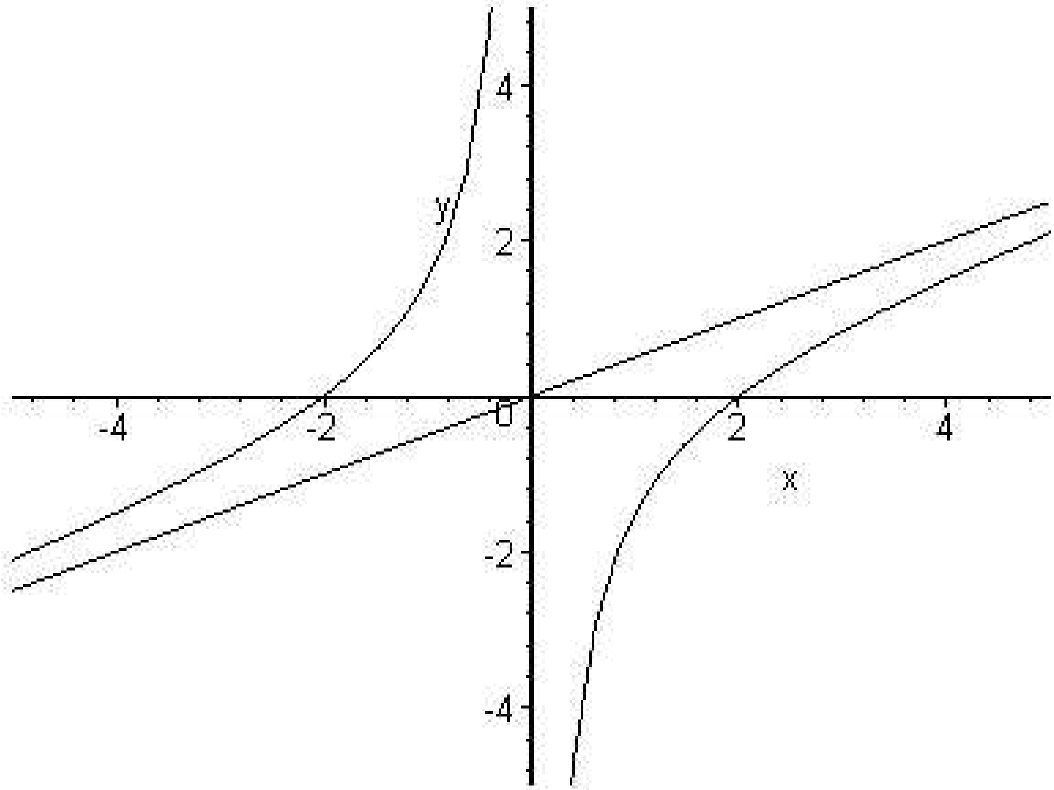
13. *Soit A le projeté orthogonal de m sur Oy ; trouver l'équation y = F(x) de l'ensemble des points m du plan vérifiant la relation : $\overrightarrow{Am}.\overrightarrow{Om'} = 4$; Etudier la fonction trouvée, construire cet ensemble, avec ses asymptotes.*

$$m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; m'\begin{pmatrix} x-2y \\ -y \end{pmatrix}; A\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}; \overrightarrow{Am}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{Om'}\begin{pmatrix} x-2y \\ -y \end{pmatrix}; \overrightarrow{Am}\cdot\overrightarrow{Om'} = x(x-2y) = x^2 - 2xy = 4 \Rightarrow y = \frac{x^2-4}{2x} = F(x)$$

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x}$; D_F = **R*** , F est continue, dérivable sur **R***, impaire , sa courbe admet la droite d'équation y= x/2 comme asymptote oblique.

$$F'(x) = \frac{x^2+4}{2x}$$

x	0	∞
$F'(x)$	||	$+$
$F(x)$	|| ∞	$\nearrow$ ∞



14. Γ *le cercle de centre O et de rayon 1 du plan (P). Déterminer une équation de son image* $\Gamma' = s(\Gamma)$*.*

$x^2 + y^2 = 1$ est l'équation de Γ ; $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -y \end{cases}$; inversons : $\begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = -y' \end{cases}$ car s est involutive.

Alors l'équation de Γ' est : $(x'-2y')^2 + y'^2 = 0$, en oubliant les 'prime' : $x^2 + 5y^2 - 4xy = 0$

15. *Soit* $(O, \vec{I}, \vec{J})$ *un nouveau repère orthonormé direct tel qu'une mesure de l'angle* $(\vec{i}, \vec{I})$ *soit le réel* α*. Ecrire les formules de passage de* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *à* $(O, \vec{I}, \vec{J})$ *, c'est à dire exprimer les coordonnées (x , y) d'un point dans* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *en fonction des coordonnées (X , Y) de ce même point dans* $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

C'est une question de cours : $\begin{cases} x = \cos\alpha.X - \sin\alpha.Y \\ y = \sin\alpha.X + \cos\alpha.Y \end{cases}$

16. *Trouver une équation de* Γ *' dans* $(O,\vec{I},\vec{J})$ *en fonction de cos 2*α *et de sin 2*α.

$$(\cos\alpha.X-\sin\alpha.Y)^2+5(\sin\alpha.X+\cos\alpha.Y)^2-4(\cos\alpha.X-\sin\alpha.Y)(\sin\alpha.X+\cos\alpha.Y)=1$$

$$(\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha-4\sin\alpha.\cos\alpha)X^2+(\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha+4\sin\alpha.\cos\alpha)Y^2+$$
$$(8\cos\alpha.\sin\alpha+10\cos\alpha.\sin\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)=1$$

$$(1+4\sin^2\alpha-2\sin2\alpha)X^2+(1+4\cos^2\alpha+2\sin2\alpha)Y^2+(4\sin2\alpha-4\cos2\alpha)XY=1$$

$$(3-2\cos2\alpha-2\sin2\alpha)X^2+(3+2\cos2\alpha+2\sin2\alpha)Y^2+4(\sin2\alpha-\cos2\alpha)XY=1$$

$$\left(\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\;\;;\;\;\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right)$$

17. *On suppose maintenant* $\alpha=\frac{\pi}{8}$ *, donner une équation de* Γ *' dans le repère* $(O,\vec{I},\vec{J})$ *; en déduire la nature de la conique* Γ *' et préciser ses paramètres a et b. Tracer* Γ *' dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On pourra utiliser : $3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$ et $3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$

$\alpha=\frac{\pi}{8}\Rightarrow\cos2\alpha=\sin2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; l'équation devient : $(3-2\sqrt{2})X^2+(3+2\sqrt{2})Y^2=1$

soit encore : $\dfrac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2}+\dfrac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2}=1\Leftrightarrow\dfrac{X^2}{(\sqrt{2}+1)^2}+\dfrac{Y^2}{(\sqrt{2}-1)^2}=1$

on trouve donc : $a=\sqrt{2}+1$ et $b=\sqrt{2}-1$.