CONCOURS COMMUN 2006
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Vendredi 12 mai 2006 de 8h00 à 12h00

Corrigé

Auteur du Sujet : M. BREVET– Lycée Montaigne - BORDEAUX

corrigé Analyse

1) $\lim\limits_{t\to 0^+} t.\ell n^3 t = \lim\limits_{t\to 0^+} t.\ell n^2 t = 0$ sont des limites usuelles. x et y sont donc continus en 0 pour $\boxed{\lambda = 0}$.

2) $t \mapsto t$ et ℓn étant dérivables (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$, x et y sont dérivables ($\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$ comme produit, et on a : $\boxed{\forall t > 0\,,\ x'(t) = \ell n^2(t).(3 + \ell n\, t)}$; $\boxed{\forall t > 0\,,\ y'(t) = \ell n\,(t).(2 + \ell n\, t)}$. Le signe de x' et y' est alors donné par les tableaux suivants :

t	0		e^{-3}		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

t	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Le tableau de variations de x et y est donc :

t	0		$\dfrac{1}{e^3}$		$\dfrac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
x	0	$\searrow$	$-\dfrac{27}{e^3}$	$\nearrow$	$-\dfrac{8}{e^2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{9}{e^3}$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) Soit u au voisinage de 0. Comme $1 + u \sim 1$ et $\ell n\,(1 + u) \sim u$, on a par produit d'équivalents : $(1 + u)\ell n^3(1 + u) \sim 1.u^3$ donc $\boxed{x(1 + u) \sim u^3}$.

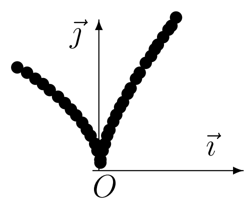
De plus $y(1 + u) = (1 + u)\ell n^2(1 + u) = (1 + u).\left(u - \frac{u^2}{2} + o\,(u^2)\right)^2 = (1 + u).u^2.\left(1 - \frac{u}{2} + o\,(u)\right)^2$ d'où $y(1 + u) = u^2.(1 + u).(1 - u + o(u)) = u^2.(1 - u + u + o(u))$ soit $\boxed{y(1 + u) = u^2 + o\,(u^3)}$.

Le seul réel t_0 annulant f' est $\underline{t_0 = 1}$ donc seul le point $f(1)$ (à savoir $(0, 0)$) est un point singulier de l'arc.

Or au voisinage de $t = 1$ on a, d'après les calculs précédents :

$$f(t) = (t - 1)^2.(0, 1) + (t - 1)^3.(1, 0) + o\left((t - 1)^3\right)$$

Comme $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ne sont pas colinéaires, et 2 étant pair et 3 impair, le point singulier est <u>point de rebroussement de première espèce</u> et un vecteur directeur de la tangente est $\vec{\jmath}$.



5) $\forall t > 0\,,\ \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{\ell n\, t}$. On a : $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0}$.

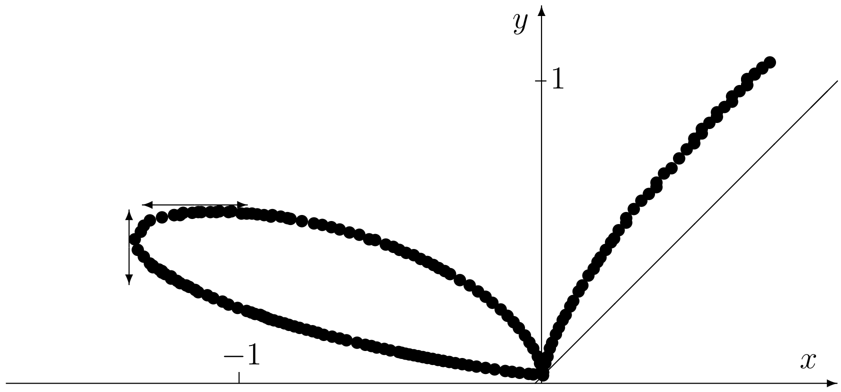
On peut conclure que l'arc possède une <u>branche parabolique de direction $(0x)$</u> au voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$, les sécantes passant par le point $f(0)$ ont une position limite donc <u>l'arc possède au point $f(0)$ une demi-tangente définie par $y = 0$ et $x \leqslant 0$.</u>

6)a) Soit $t > 0$. On a : $x(t) = y(t) \Leftrightarrow (\ell n\, t - 1)\ell n^2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = e$.

$\mathcal{C} \cap \Delta$ est donc constitué de $f(0)$, $f(1)$ et $f(e)$, à savoir <u>le point O et le point de coordonnées (e, e)</u>.

6)b)



7) $Z_0(x) = \displaystyle\int_1^x t^\alpha\, dt$, soit : $\boxed{Z_0(x) = \frac{1}{\alpha+1}\left(x^{\alpha+1} - 1\right)}$.

On calcule $Z_1(x)$ par intégration par parties ($t \mapsto t^{\alpha+1}$ et ℓn étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ donc sur $]1, x[$) :

$Z_1(x) = \left[\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ell n\, t\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}.\dfrac{1}{t}dt.$

D'où : $\boxed{Z_1(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ell n\, x - \dfrac{1}{\alpha+1}Z_0(x), \text{ puis : } Z_1(x) = \left(\dfrac{1}{\alpha+1}\right)^2 + \left[-\left(\dfrac{1}{\alpha+1}\right)^2 + \dfrac{1}{\alpha+1}\ell n\, x\right]x^{\alpha+1}}$

8) De la même façon, on intègre par parties $Z_{n+1}(x)$ ($\ell n^{\,n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$) :

$Z_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}\left[\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ell n^{\,n+1}(t)\right]_1^x - \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_1^x \dfrac{n+1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}.\dfrac{1}{t}\ell n^{\,n}(t)\, dt$

d'où la relation $\boxed{Z_{n+1}(x) = -\dfrac{1}{\alpha+1}Z_n(x) + \dfrac{1}{\alpha+1}\dfrac{\ell n^{\,n+1}(x)}{(n+1)!}x^{\alpha+1}}$

9) On procède par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $Z_n(x) = \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\displaystyle\sum_{k=0}^n \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\dfrac{\ell n^{\,k}(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}$"

Pour $n = 0$ le membre de droite de l'écriture ci-dessus donne : $-\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, ce qui est bien $Z_0(x)$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé.

On a alors : $Z_{n+1}(x) = -\dfrac{1}{\alpha+1}\left\{\left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\displaystyle\sum_{k=0}^n \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\dfrac{\ell n^{\,k}(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}\right\} + \dfrac{1}{\alpha+1}\dfrac{\ell n^{\,n+1}(x)}{(n+1)!}x^{\alpha+1}$

c'est-à-dire : $Z_{n+1}(x) = \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+2} - \left[\displaystyle\sum_{k=0}^n \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+2-k}\dfrac{\ell n^{\,k}(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1} - \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+2-(n+1)}\dfrac{\ell n^{\,n+1}(x)}{(n+1)!}x^{\alpha+1}$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, $\underline{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout entier naturel } n}$.

10) Soit $(a_0, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons : $p : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k x^k$.

$x \mapsto \displaystyle\int_1^x p(\ell n\, t)t^\alpha\, dt$ est une primitive de $g : x \mapsto p(\ell n\, x)x^\alpha$. Or pour $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x p(\ell n\, t)t^\alpha\, dt = \sum_{k=0}^n a_k.k!.Z_k(x)$.

D'après l'expression trouvée dans la question précédente, Z_k est à une constante près dans $\mathcal{N}_{\alpha+1}^k \subset \mathcal{N}_{\alpha+1}^n$.

$\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$ est stable par combinaison linéaire donc on obtient l'$\underline{\text{existence d'une primitive de } g \text{ qui soit élément de } \mathcal{N}_{\alpha+1}^n}$.

11) $(E_1) \Leftrightarrow y' = \dfrac{\alpha}{x}y \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{\alpha \ell n\, x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions du type $\boxed{x \mapsto \lambda x^\alpha \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

12)a) $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ où h est de classe $\mathcal{C}^2$.

Donc $k = \exp \circ h$ est donc de classe $\underline{\mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

De plus : $\boxed{\forall u \in \mathbb{R}\,,\ k'(u) = e^u\, h'(e^u) \text{ et } k''(u) = e^u\, h'(e^u) + e^{2u}\, h''(e^u)}$

12)b)
$\forall x > 0\,,\ x^2.h''(x) + (1-2\alpha)x.h'(x) + \alpha^2 h(x) = 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}\,,\ e^{2u}.h''(e^u) + (1-2\alpha)e^u.h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u) = 0$,
puis : $\forall u \in \mathbb{R}\,,\ e^{2u}.h''(e^u) + e^u.h'(e^u) - 2\alpha e^u.h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u) = 0 \Leftrightarrow \underline{\forall u \in \mathbb{R}\,,\ k''(u) - 2\alpha\, k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0}$

12)c) $z'' - 2\alpha\, z' + \alpha^2 z = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène dont l'équation caractéristique $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 = 0$ a pour racine double $r = \alpha$.
D'où : $\boxed{\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\,,\ \forall u \in \mathbb{R}\,,\ k(u) = (\lambda u + \mu)e^{\alpha u}}$

12)d) On effectue le changement de variable : $x = e^u \Leftrightarrow x = \ell n\, u$ avec $(x,u) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
On obtient donc : $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\,,\ \forall x > 0\,,\ h(x) = (\lambda\,\ell n\, x + \mu)e^{\alpha\,\ell n\, x} = (\lambda\,\ell n\, x + \mu)x^\alpha$.
L'ensemble des solutions de (E_2) est donc bien $\mathcal{N}_\alpha^1$.

13)a) $(P\circ P)(y) = P(x.y' - \alpha y) = x.(x.y' - \alpha y)' - \alpha(x.y' - \alpha y) = x.(y' + x.y'' - \alpha y') - \alpha x.y' + \alpha^2 y$.
D'où : $\boxed{(P\circ P)(y) = x^2.y'' + (1-2\alpha)x.y' + \alpha^2 y = 0}$. D'où $\underline{P^2(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}_\alpha^1}$.

13)b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{Q}(n)$: " $\exists(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\,,\ P^n(y) = x^n.y^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k.y^{(k)}$ ".
On a $P^1(y) = xy' - a_0.y$ avec $a_0 = \alpha$ donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé.
Ecrivons donc : $P^n(y) = x^n.y^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k.y^{(k)}$.D'autre part, on pose, par commodité, $a_{-1} = 0$.
Or : $P^{n+1}(y) = P(P^n(y)) = x^{n+1}.y^{(n+1)} + nx^n.y^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\,\left(x^{k+1}.y^{(k+1)} + kx^k.y^{(k)}\right) - \alpha P^n(y)$, d'où
$P^{(n+1)}(y) = x^{n+1}.y^{(n+1)} + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k\, x^k.y^{(k)}$ avec $b_n = n - \alpha + a_{n-1}$ et pour $0 \leqslant k \leqslant n-1\,,\ b_k = (k-1)a_k + a_{k-1}$
Comme $(b_0,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $\underline{\mathcal{Q}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

13)c) On procède une fois encore par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{R}(n)$: "$P^n(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}_\alpha^{n-1}$ ".
$\mathcal{R}(1)$ est vrai d'après la question 11. Supposons $\mathcal{R}(n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
D'où $P^{n+1}(y) = 0 \Leftrightarrow P^n(P(y)) = 0 \Leftrightarrow P(y) = (a_0 + a_1\ell n\, x + \ldots a_{n-1}\ell n^{\,n-1}x)x^\alpha$ avec $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$.
En utilisant la méthode de la variation de la constante ($y = \lambda(x)x^\alpha$), on aboutit à :
$\lambda'(x)x^{\alpha+1} = (a_0 + a_1\ell n\, x + \ldots a_{n-1}\ell n^{\,n-1}x)x^\alpha$ soit $\lambda'(x) = \frac{1}{x}(a_0 + a_1\ell n\, x + \cdots + a_{n-1}\ell n^{\,n-1}x)$.
Donc : $\lambda(x) = a + a_0\ell n\, x + \frac{1}{2}a_1\ell n^{\,2}x + \cdots + \frac{1}{n}a_{n-1}\ell n^{\,n}x$ $(a \in \mathbb{R})$,
puis : $y = (a + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}a_{k-1}\ell n^{\,k}x)x^\alpha$, d'où $\mathcal{R}(n+1)$.

Barème Analyse

question 1 : 1 point
question 2 : 2 points (dérivées) $+$ 2 points (signe)
question 3 : 2 points
question 4 : 2 points (x) $+2$ points (y) $+$ 1 point (nature) $+$ 1 point (schéma)
question 5 : 1 point (deux limites) $+$ 1 point (branche infinie) $+$ 2 points (demi-tangente)
question 6a : 2 points
question 6b : 3 points

soit : Partie 1 : 22 points

question 7 : 1 point (Z_0) $+$ 2 points (Z_1)
question 8 : 3 points
question 9 : 3 points
question 10 : 3 points

soit : Partie 2 : 12 points

question 11 : 2 points
question 12a : 1 point (classe) $+$ 2 points (dérivées)
question 12b : 2 points
question 12c : 2 points
question 12d : 1 point
question 13a : 2 points
question 13b : 2 points
question 13c : 2 points

soit : Partie 3 : 16 points

Corrigé du problème d'algèbre

1) • Supposons $A_{n,\alpha}$ non vide. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\exp(2i\pi np\alpha) = 1$ i.e. $np\alpha \in \mathbb{Z}$.
Il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha = \dfrac{q}{np}$. α est donc bien un nombre rationnel.
• Supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $\alpha = \dfrac{p}{q}$. D'où : $\exp(2i\pi nq\alpha) = \exp(2i\pi np) = 1$ donc $q \in A_{n,\alpha}$ et $A_{n,\alpha}$ n'est pas l'ensemble vide.
On a donc : $\underline{A_{n,\alpha} \neq \emptyset \iff \alpha \in \mathbb{Q}}$.
2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a : $\exp(2i\pi np\alpha) = 1 \Leftrightarrow [\exp(2i\pi np\alpha)]^{-1} = 1 \Leftrightarrow \exp(2i\pi np(-\alpha)) = 1$.
D'où $p \in A_{n,\alpha} \Leftrightarrow p \in A_{n,-\alpha}$, soit encore $A_{n,\alpha} = A_{n,-\alpha}$. Donc : $\min(A_{n,\alpha}) = \min(A_{n,-\alpha})$, i.e. $\underline{p(\alpha) = p(-\alpha)}$.
3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a : $p \in A_{n,\alpha} \Leftrightarrow p \in A_{n,|\alpha|} \Leftrightarrow np|\alpha| \in \mathbb{Z}$.
Or $\alpha \neq 0$ donc $|\alpha| > 0$ et par conséquent comme $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $np|\alpha| > 0$.
D'où : $p \in A_{n,\alpha} \Leftrightarrow np|\alpha| \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*,\ np\dfrac{r}{s} = t$.
puis : $p \in A_{n,\alpha} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*,\ npr = st \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*,\ dn'pr = ds't$. Comme $n \neq 0$, $d = n \wedge s \neq 0$.
D'où : $\underline{\text{pour } p \in \mathbb{N}^*,\ p \in A_{n,\alpha} \Leftrightarrow [\exists t \in \mathbb{N}^*,\ p.n'.r = s'.t]}$.
4) Or $p.n'.r = s'.t \Rightarrow [s' \text{ divise } (p.n'.r)]$.
Or $r \wedge s = 1$ donc $r \wedge s' = 1$. De plus $n' \wedge s' = 1$. D'où : $(n'.r) \wedge s' = 1$.
On applique alors le théorème de Gauss : s' divise p. Ainsi : $p \in A_{n,\alpha} \Rightarrow\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*,\ p = s'.k$.
Donc $A_{n,\alpha} \subset \{s'k \,/\, k \in \mathbb{N}^*\}$, d'où $\min(A_{n,\alpha}) \geqslant s'$.
Or $\exp(2i\pi ns'.\dfrac{r}{s}) = \exp(2i\pi d.n'.s'.\dfrac{r}{d.s'}) = \exp(2i\pi n'.r) = 1$ donc $s' \in A_{n,\alpha}$.
D'où $s' = \min(A_{n,\alpha})$ i.e. $\boxed{p(\alpha) = \dfrac{s}{n \wedge s}}$
5) La matrice nulle, élément neutre pour l'addition des matrices, n'appartient pas à $\mathbb{J}$.
$\underline{\mathbb{J} \text{ n'est donc pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$.
6) On a : $N^0 = I$; $N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\forall p \geqslant 3,\ N^p = O$ (matrice nulle)
On a d'autre part : $J_\lambda = \lambda I + N$. Or λI et N sont deux matrices de l'anneau $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commutent donc la formule du binôme de Newton peut être utilisée et s'écrit : $\forall p \in \mathbb{N},\ (J_\lambda)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\lambda I)^{p-k} N^k$.
D'où pour $p \geqslant 2$: $(J_\lambda)^p = \lambda^p I + p\lambda^{p-1}N + \frac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2}N^2$
pour $p = 0$, le membre de droite de l'égalité ci-dessus est I : c'est bien $(J_\lambda)^0$
pour $p = 1$, le membre de droite vaut $\lambda I + N$: c'est J_λ.
Donc : $\forall p \in \mathbb{N},\ (J_\lambda)^p = u_p.I + v_p.N + w_p.N^2$ avec $\boxed{u_p = \lambda^p,\ v_p = p\lambda^{p-1},\ w_p = \frac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2}}$
7) Soit $p \geqslant 2$. Par la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, S_p est égal à :
$$\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}\right) I + \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{k}{k!}\lambda^{k-1}\right) N + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{k(k-1)}{k!}\lambda^{k-2}\right) N^2$$
c'est-à-dire $\left(\sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{\lambda^k}{k!}\right) I + \left(\sum\limits_{\mathbf{k=1}}^{p} \dfrac{k}{k!}\lambda^{k-1}\right) N + \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{\mathbf{k=2}}^{p} \dfrac{k(k-1)}{k!}\lambda^{k-2}\right) N^2$, soit encore :
$$S_p = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}\right) I + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) N + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{p} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\right) N^2 = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}\right) I + \left(\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{p-1}} \frac{\lambda^k}{k!}\right) N + \frac{1}{2}\left(\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{p-2}} \frac{\lambda^k}{k!}\right) N^2.$$
On obtient donc : $\forall p \geqslant 2,\ S_p = x_p.I + x_{p-1}.N + \dfrac{1}{2}x_{p-2}.N^2$ avec : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ x_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{\lambda^k}{k!}}$

8) Pour $p \in \mathbb{N}$, on a : $S_p = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \frac{1}{2}x_{p-2} \\ 0 & x_p & x_{p-1} \\ 0 & 0 & x_p \end{pmatrix}$.

Comme la suite x converge vers e^λ, on obtient donc : $\boxed{S = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

9) Si f est définie sur $\mathbb{R}$, alors g est encore définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.
Donc φ est bien une application de E dans E.
Soient $(f_1, f_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit x un nombre réel quelconque.
On a : $\varphi(f_1 + \lambda.f_2)(x) = (f_1 + \lambda.f_2)(x + 2\pi) = f_1(x + 2\pi) + (\lambda.f_2)(x + 2\pi) = f_1(x + 2\pi) + \lambda.f_2(x + 2\pi)$
d'où : $\varphi(f_1 + \lambda.f_2)(x) = \varphi(f_1)(x) + \lambda.\varphi(f_2)(x) = (\varphi(f_1) + \lambda.\varphi(f_2))(x)$.
Comme x est quelconque, on obtient : $\varphi(f_1 + \lambda.f_2) = \varphi(f_1) + \lambda.\varphi(f_2)$.
On a donc prouvé que $\underline{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$.
10)a) $f \in E_n \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n) e^{i\alpha x}$
i.e. : $f \in E_n \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0.f_0(x) + \dots + a_n.f_n(x)$
ou encore : $f \in E_n \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, f = a_0.f_0 + \dots + a_n.f_n$.
On a donc : $E_n = \{a_0.f_0 + \dots + a_n.f_n \,/\, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\}$.
Autrement dit, $\underline{E_n \text{ est le sous-espace vectoriel de } E \text{ engendré par la famille } \mathcal{F} = (f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}}$.
Montrons que cette famille est libre :
Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que : $a_0.f_0 + \dots + a_n.f_n = [0]$
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, (a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n) e^{i\alpha x} = 0$.
Or : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{i\alpha x} \neq 0$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n = 0$.
Le polynôme $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ possède donc une infinité de racines (tous les réels) : c'est donc le polynôme nul. Par conséquent : $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, ce qui prouve la liberté de $\mathcal{F}$.
$\mathcal{F}$ est ainsi une famille libre et génératrice de E_n : $\underline{\mathcal{F} \text{ est une base de } E_n}$.
10)b) E_n est l'ensemble des combinaison linéaires des éléments $f_0, f_1, \dots, f_n$. Donc le sous-espace vectoriel somme $E_n + \text{vect}(f_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$: c'est donc E_{n+1}. Ainsi a-t-on : $\boxed{E_{n+1} = E_n + \text{vect}(f_n)}$.
11)a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\varphi(f_k)(x) = f_k(x + 2\pi) = (x + 2\pi)^k e^{i\alpha(x+2\pi)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (2\pi)^{k-p} x^p e^{2i\pi\alpha} e^{i\alpha x}$

d'où : $$\boxed{\varphi(f_k) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (2\pi)^{k-p} e^{2i\pi\alpha} f_p}$$

11)b) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Comme φ est linéaire : $\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k.f_k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k.\varphi(f_k)$.
Or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(f_k)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$, donc : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(f_k) \in E_n$.
Comme E_n est stable par combinaison linéaire, $\sum_{k=0}^{n} a_k.\varphi(f_k)$ appartient à E_n. On a donc : $\underline{\varphi(E_n) \subset E_n}$.
12) D'après la question $11a$, on a : $\varphi(f_0) = e^{2i\pi\alpha}.f_0$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(f_k) = e^{2i\pi\alpha}.f_k + 2k\pi e^{2i\pi\alpha}.f_{k-1} + h_k$ avec $h_k \in \text{vect}((f_p)_{0 \leqslant p < k})$. La matrice de m relativement à la base $\mathcal{F}$ est donc la matrice (d'ordre $n+1 = \text{card}\mathcal{F}$) suivante :

$$M = e^{2i\pi\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 2\pi & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & 4\pi & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 6\pi & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ & \mathbf{0} & & 0 & 1 & 2n\pi \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13) On a : $\det((m)^p) = [\det(m)]^p$. Or $\det(m) = \det(M) = e^{2i\pi(n+1)\alpha}$ comme produit des éléments diagonaux d'une matrice triangulaire d'ordre $(n+1)$. Le résultat cherché est donc : $\boxed{\det((m)^p) = e^{2i\pi(n+1)p\alpha}}$
14) Pour $\boxed{p = \dfrac{s}{(n+1) \wedge s}}$ (avec s dénominateur positif dans l'écriture irréductible de α),
$(m)^p$ est un endomorphisme de déterminant 1 et c'est la plus petite puissance (non-nulle) de m qui donne cette propriété.
15)a) On a (cf. question 12) : $m(f_0) = e^{2i\pi\alpha} f_0$. D'où : $(m - e^{2i\pi\alpha}.id)(f_0) = f_0$ i.e. $\underline{\ell(f_0) = [0]}$.
15)b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On a (cf. question 11) : $m(f_{k+1}) = e^{2i\pi\alpha}.f_{k+1} + 2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}.f_k + h_{k-1}$ avec $h_{k-1} \in \text{vect}((f_p)_{0 \leqslant p < k})$
d'où $\ell(f_{k+1}) = 2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}.f_k + h_{k-1}$.

On a donc $\ell(f_{k+1}) \in$ vect$((f_p)_{0\leqslant p\leqslant k})$ i.e. $\underline{\ell(f_{k+1}) \in E_k}$ et la composante de $\ell(f_{k+1})$ selon f_k est : $\underline{2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}}$.

15)c) Or $E_{k+1} =$ vect$(f_{k+1}) + E_k$. Comme $\ell(f_{k+1}) \in E_k$ et $\ell(E_k) \subset E_k$ (ℓ est un endomorphisme de E_k), par linéarité de ℓ, on a : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \ell(E_{k+1}) \subset E_k$

Posons, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{R}(k)$: "$\ell^{k+1}(E_k) = \{[0]\}$".

Or $E_0 =$ vect(f_0) et $\ell(f_0) = [0]$, donc $\ell(E_0) = \{[0]\}$: $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

Suppsons pour un entier fixé $k \in [\![0, n-1]\!]$, la proposition $\mathcal{R}(k)$ vraie.

On a : $\ell^{k+2}(E_{k+1}) = \ell^{k+1}\left(\ell(E_{k+1})\right) \subset \ell^{k+1}(E_k)$.

D'où : $\ell^{k+2}(E_{k+1}) = \{[0]\}$. $\mathcal{R}(k+1)$ est donc vraie.

Par le principe de récurrence, $\underline{\text{toutes les propositions } \mathcal{R}(k) \text{ sont vraies}}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

15)d) Posons, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$: "$\ell^k(f_k) = k!\,(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}.f_0$".

$\ell^0(f_0) = f_0$ et $0!\,(2\pi)^0 e^{2i\pi\alpha\times 0} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons pour un entier k fixé dans $[\![0, n-1]\!]$ la proposition $\mathcal{P}(k)$ vraie.

Avec les notations précédentes, on a : $\ell(f_{k+1}) = \left(2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}\right).f_k + h_{k-1}$.

D'où, par linéarité de ℓ^k, on obtient : $\ell^{k+1}(f_{k+1}) = \left(2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}\right).\ell^k(f_k) + \ell^k(h_{k-1})$

On a donc : $\ell^{k+1}(f_k) = \left[2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}.(k)!(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}\right].f_0 + [0] = \left((k+1)!(2\pi)^{k+1}e^{2i(k+1)\pi\alpha}\right).f_0$.

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $\underline{\text{toutes les propositions } \mathcal{P}(k) \text{ sont vraies}}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

15)e) $\ell^n(f_n)(0) = n!\,(2\pi)^n e^{2ni\pi\alpha}$ est un nombre complexe non-nul donc $\underline{\ell^n(f_n) \neq [0]}$.

Par linéarité de ℓ, on obtient : $\ell^{n+1}(f_n) = n!\,(2\pi)^n e^{2ni\pi\alpha}.\ell(f_0)$ i.e. $\underline{\ell^{n+1}(f_n) = [0]}$.

16) Comme E_n est de dimension $n+1$ et que la famille $\mathcal{B}$ est constituée de $n+1$ vecteurs de E_n, il suffit de prouver que la famille en question est libre :

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que : $a_0.f_n + a_1.\ell(f_n) + \cdots + a_n.\ell^n(f_n) = [0] \qquad (*)$.

Posons, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{Q}(k)$: "$a_k = 0$".

En appliquant l'application ℓ^n à $(*)$, on obtient : $a_0.\ell^n(f_n) = [0]$. Comme $\ell^n(f_n) \neq [0]$, on a $a_0 = 0$.

Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Supposons pour un entier k fixé dans $[\![0, n-1]\!]$ les $k+1$ propositions $\mathcal{Q}(0)$, $\mathcal{Q}(1)$, ... , $\mathcal{Q}(k)$ vraies.

On a donc : $\sum\limits_{p=k+1}^{n} a_p.\ell^p(f_n) = [0]$. On applique $\ell^{n-(k+1)}$ à cette égalité et on trouve :

$a_{k+1}.\ell^n(f_n) = [0]$ d'où $a_{k+1} = 0$. $\mathcal{Q}(k+1)$ est donc vraie.

Par le principe de récurrence, toutes les propositions $\mathcal{Q}(k)$ sont vraies pour $k \in [\![0, n]\!]$. Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme elle comporte $(n+1)$ vecteurs, c'est $\underline{\text{une base de } E_n}$.

17) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\ell(\ell^k(f_n)) = \ell^{k+1}(f_n)$ et $\ell(\ell^n(f_n)) = [0]$. D'où : $M_{\mathcal{B}_\alpha}(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18) Or $m_\alpha = \ell + e^{2i\pi\alpha}.id$. Donc : $M_{\mathcal{B}_\alpha}(m_\alpha) = M_{\mathcal{B}_\alpha}(\ell) + e^{2i\pi\alpha}.I_n$, soit :

$$M' = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\alpha} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\alpha} & 1 & 0 & \mathbf{0} & \vdots \\ 0 & 0 & e^{2i\pi\alpha} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & e^{2i\pi\alpha} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & e^{2i\pi\alpha} \end{pmatrix}$$

19) $\mathbb{J}_{n+1}$ est l'ensemble des matrices de la forme : $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \text{\Large 0} & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \text{\Large 0} & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec λ de module 1.

La matrice M' trouvée précédemment appartient à $\mathbb{J}_{n+1}$.
L'application $\alpha \mapsto M'$ est donc bien à valeurs dans $\mathbb{J}_{n+1}$.
Or pour λ de module 1 et $\alpha = \frac{1}{2\pi} Arg\,(\lambda)$, on a : $e^{2i\pi\alpha} = \lambda$ donc $J_\lambda = M'$, ce qui montre la surjectivité voulue.

Barème Algèbre

question 1 : 2 points
question 2 : 2 points
question 3 : 2 points
question 4 : 3 points

soit : Partie 1 : 9 points

question 5 : 1 point
question 6 : 2 points (puissances de N) $+ \ 3$ points
question 7 : 3 points
question 8 : 2 points

soit : Partie 2 : 11 points

question 9 : 2 points
question 10a : 1 point $+ \ 2$ points
question 10b : 1 point question 11a : 2 points
question 11b : 1 point
question 12 : 3 points
question 13 : 2 points
question 14 : 1 point

soit : Partie 3 : 15 points

question 15a : 1 point
question 15b : 1 point
question 15c : 2 points
question 15d : 2 points
question 15e : 2 points
question 16 : 2 points
question 17 : 2 points
question 18 : 1 point
question 19 : 2 points

soit : Partie 4 : 15 points