# Corrigé

## Premier problème

### I

*1.* Lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs négatives, $-\dfrac{1}{x} \to +\infty$, $e^{-\frac{1}{x}} \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$ et $f(x) \to +\infty$. La fonction $f$ **n'est pas continue à gauche en 0, donc n'est pas dérivable à gauche en 0**.

.Lorsque $x \to 0^+$, il y a indétermination ; posons $X = -\dfrac{1}{x}$ ; alors $X \to -\infty$ ,
$f(x) = X^2e^X \to 0$ (croissance comparée). De $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, on déduit que ***f* est continue à droite en 0**

Pour $x > 0$, en posant comme ci-dessus $X = -\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -X^3e^X \to 0$, ce qui montre que $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en 0 et que } f'_d(0) = 0}$.

*2.* Lorsque $x \to \pm\infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} \to 1$ ; donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, ce qui montre que **l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C})$ lorsque** $x \to \pm\infty$.
On a vu que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, ce qui montre que **l'axe des ordonnées est asymptote à** $(\mathscr{C})$.
La fonction $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions qui le sont et $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}e^{\frac{-1}{x}} + \dfrac{1}{x^4}e^{\frac{-1}{x}}$ ; $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-2x}{x^4}e^{\frac{-1}{x}}}$
D'où les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $0$ | ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | $0$ |

3. On a, pour $x \neq 0$ : $f''(x) = \dfrac{6x-4}{x^5} e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1-2x}{x^6} e^{-\frac{1}{x}}$ $f''(x) = \dfrac{6x^2-6x+1}{x^6} e^{-\frac{1}{x}}$.

   On en déduit que $f''(x)$ est du signe de $6x^2-6x+1$ qui a pour racines $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$.

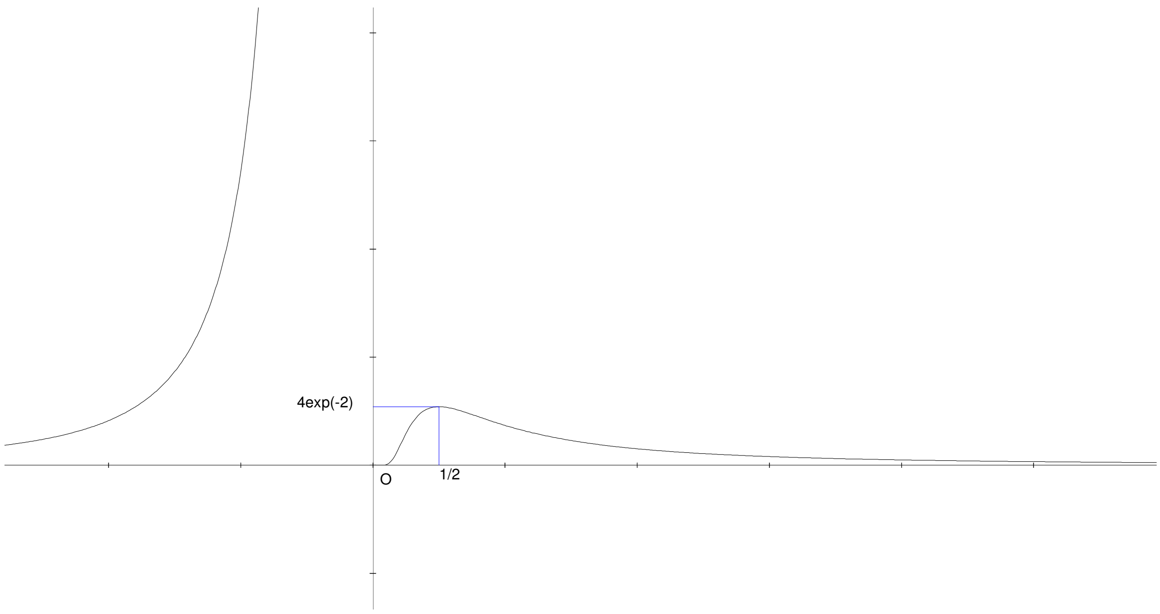
   D'où :

   • $f$ est convexe sur $\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right[ \cup \left]\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right[$

   • $f$ est concave sur $\left]\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right[$

   Pour $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ et $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$, on a un point d'inflexion car $f''$ s'annule et change de signe.

4. La demi-tangente en $O$ est horizontale.




## II

5. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a : $f(x) \geqslant 0$.

   Comme l'unité graphique est de 2 cm, l'aire demandée est $\mathscr{A}(h) = 4\int_h^1 \dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) dx$.

   En posant $u = -\dfrac{1}{x}$, on obtient : $\mathscr{A}(h) = 4\int_{-1/h}^{-1} e^u du$ ; ainsi $\boxed{\mathscr{A}(h) = 4\left(\dfrac{1}{e} - e^{-1/h}\right) \text{ cm}^2}$.

*6.* Lorsque $h$ tend vers 0 par valeurs positives, $e^{-1/h}$ tend vers 0 ; donc l'aire cherchée est :
$\boxed{\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \mathscr{A}(h) = \frac{4}{e} \ \text{cm}^2}$.

**III**

*7.* Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, sans second membre.
Pour $x \neq 0$, on a : $y' = \frac{1-2x}{x^2} y$ ; de $\int \frac{1-2x}{x^2} dx = \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x|$, on déduit,

pour $x > 0$ : $y = \lambda \exp\left( -\frac{1}{x} - 2\ln x \right) = \lambda \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et ,

pour $x < 0$, $y = \mu \exp\left( -\frac{1}{x} - 2\ln(-x) \right) = \mu \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$, $(\mu \in \mathbb{R})$.

*8.* Supposons que $y$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)$. Elle est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe une constante $\lambda$ telle que $\forall x > 0 \quad y(x) = \lambda \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ ;
De même, elle est solution sur $\mathbb{R}_-^*$, donc il existe une constante $\mu$ telle que
$\forall x < 0 \quad y(x) = \mu \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$
Le fait que l'équation $(E)$ soit vérifiée pour $x = 0$ entraîne $y(0) = 0$.
Comme $f$ est dérivable à droite en 0, $y$ est dérivable à droite en 0.
Comme $f$ n'est pas dérivable à gauche en 0, $y$ n'est pas dérivable à gauche en 0, sauf si $\mu = 0$.

Ainsi, il existe un réel $\lambda$ tel que $y(x) = \begin{cases} \lambda \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Réciproquement, soit $y$ la fonction définie par $y(x) = \begin{cases} \lambda \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$, où $\lambda$ est une constante réelle. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et l'on a :
$\forall x \neq 0 \quad x^2 y'(x) + (1-2x) y(x) = 0$, puisque les restrictions de $y$ à $\mathbb{R}_+^*$ et à $\mathbb{R}_-^*$ (prendre $\mu = 0$) sont solutions de $(E)$.
De plus, $y$ à dérivable à droite en 0 ( $y = \lambda f$ ) et elle est aussi dérivable à gauche en 0 (fonction constante) et l'on $y_d'(0) = y_g'(0) = 0$. Donc $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et puisque $0y'(0) + (2 \times 0 - 1) y(0) = 0$, $y$ est solution sur $\mathbb{R}$.

La solution générale de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est donc définie par $\boxed{y(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$, où $\lambda$ est une constante réelle.

**IV**

*9.* La fonction $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions qui le sont.

*10.* En posant $P_0(X) = 1$, on a $f^{(0)}(x) = \dfrac{P_0(x)}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$ et en posant $P_1(x) = 1 - 2x$, on a bien $f'(x) = \dfrac{P_1(x)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$, où $P_1$ est un polynôme.

Supposons qu'il existe un polynôme $P_n$ tel que $\forall x \neq 0 \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$ ;

alors $\forall x \neq 0 \quad f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_n'(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} + P_n(x)\left[-(2n+2)x^{-(2n+3)}\right] e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2}$, soit

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{x^2 P_n'(x) - 2(n+1) x P_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)+2}} e^{\frac{-1}{x}}.$$

Posons $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x)$ ; alors $P_{n+1}$ est un polynôme (somme et produit de polynômes) et l'on a : $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+2)}}$, ce qui prouve, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ tel que $\boxed{\forall x \neq 0 \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}}$

De plus, on a vu que : $\boxed{P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x)}$

*11.* On a vu que $\boxed{P_0(x) = 1}$ et que $\boxed{P_1(x) = 1 - 2x}$

De la relation précédente, on déduit : pour $n = 1 \quad P_2(x) = x^2 P_1'(x) + (1 - 4x) P_1(x)$ ; donc

$\boxed{P_2(x) = 1 - 6x + 6x^2}$ ;

pour $n = 2 \quad P_3(x) = x^2(-6 + 12x) + (1 - 6x)(1 - 6x + 6x^2)$ ; donc

$\boxed{P_3(x) = 1 - 12x + 36x^2 - 24x^3}$

Pour $n = 3 \quad P_4(x) = x^2(-12 + 72x - 72x^2) + (1 - 8x)(1 - 12x + 36x^2 - 24x^3)$ ; donc

$\boxed{P_4(x) = 1 - 20x + 120x^2 - 240x^3 + 120x^4}$

*12.* De l'examen des polynômes $P_0, P_1, P_2, P_3$, on peut formuler l'hypothèse de récurrence suivante : $P_n$ est un polynôme de degré $n$, de terme constant 1 et de coefficient dominant $a_n = (-1)^n (n+1)!$ ;

De $P_n(x) = a_n x^n + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on déduit, en utilisant la relation (1) que :
$P_{n+1}(x) = x^2\left(na_n x^{n-1} + Q'(x)\right) + [1-2(n+1)x]\left(a_n x^n + Q(x)\right) = a_n\left(n-2(n+1)\right)x^{n+1} + Q_1(x)$
avec $d^\circ(Q_1) < n+1$ ; donc le coefficient dominant de $P_{n+1}$ est $-a_n(n+2) = (-1)^{n+1}(n+2)!$ ;
de plus $P_{n+1}(0) = 0 \cdot P_n'(0) + P_n(0) = P_n(0) = 1$, ce qui montre que :
$\forall n \in \mathbb{N}$**,** $P_n$ **est un polynôme de degré** $n$ **de coefficient dominant** $(-1)^n(n+1)!$ **et de terme constant 1.**

*13.* De $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, on déduit $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$, soit $g' = f$.

Par suite, les fonctions étant indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^*$, $(g')^{(n)} = f^{(n+1)}$, soit
$\boxed{g^{(n+1)} = f^{(n)}}$.

*14.* On rappelle que si $u$ et $v$ sont $n$ fois dérivables sur un intervalle *I*, alors $uv$ l'est aussi et que $(uv)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$.

*15.* La formule de Leibniz donne, puisque les dérivées d'ordre supérieur à 3 de $x^2$ sont nulles :
$\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2 f(x)\right) = f^{(n+1)}(x)x^2 + \dbinom{n+1}{1}f^{(n)}(x)\cdot 2x + \dbinom{n+1}{2}f^{(n-1)}(x)\cdot 2 + 0$ ; d'où,
$x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)xf^{(n)}(x) + (n+1)nf^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)$.
Donc : $\left[\dfrac{x^2 P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} + \dfrac{2x(n+1)P_n(x)}{x^{2n+2}} + \dfrac{n(n+1)P_{n-1}(x)}{x^{2n}}\right]e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}$, soit
$P_n(x) = P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)x^2P_{n-1}(x)$ ou
$\boxed{P_{n+1}(x) = [1-2(n+1)x]P_n(x) - n(n+1)x^2P_{n-1}(x)}$

*16.* Par différence des relations (1) et (2), il vient : $\boxed{P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)}$

*17.* En dérivant la relation (1), il
vient : $P_{n+1}'(x) = 2xP_n'(x) + x^2P_n''(x) + P_n'(x)[1-2(n+1)x] - 2(n+1)P_n(x)$, soit
$x^2P_n''(x) + (1-2nx)P_n'(x) - P_{n+1}'(x) - 2(n+1)P_n(x) = 0$ ;
d'où, compte tenu de $P_{n+1}'(x) = -(n+1)(n+2)P_n(x)$, il vient :
$\boxed{x^2P_n''(x) + (1-2nx)P_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0}$

## Problème 2

## I

*18.* Supposons que $\lambda Q_1(X)+\lambda_2 Q_2(X)+\lambda_3 Q_3(X)=0$

En remplaçant $X$ par $a_i$, on obtient : $\lambda_i Q_i(a_i)=0$ et, comme $Q_i(a_i)\neq 0$, on a : $\lambda_i=0\ \forall i$, ce qui montre que **la famille** $(Q_1,Q_2,Q_3)$ **est libre**.

*19.* Un calcul élémentaire donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1(1)=1, P_1(3)=0, P_1(5)=0 \\ P_2(1)=0, P_2(3)=1, P_2(5)=0 \\ P_3(1)=0, P_3(3)=0, P_3(5)=1 \end{array}}$$

*20.* Les résultats obtenus au *14.)* s'appliquent : la famille $(P_1,P_2,P_3)$ est libre.

Puisque cette famille libre comporte 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ et que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, **la famille** $(P_1,P_2,P_3)$ **est une base de** $\mathbb{R}_2[X]$**.**

*21.* Un calcul simple donne :

$$\begin{cases} P_1(X)=\dfrac{15}{8}-X+\dfrac{X^2}{8} \\ P_2(X)=-\dfrac{5}{4}+\dfrac{3X}{2}-\dfrac{X^2}{4} \\ P_3(X)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{X}{2}+\dfrac{X^2}{8} \end{cases} \qquad \text{D'où la matrice } \boxed{A=\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}.$$

*22.* Cette matrice est inversible, comme matrice de passage d'une base à une autre base.

Pour calculer son inverse, résolvons le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, ce qui donne

$$\begin{cases} \dfrac{15}{8}x - \dfrac{5}{4}y + \dfrac{3}{8}z = x' \\ -x + \dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{2}z = y' \\ \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{8}z = z' \end{cases}$$

Après calculs, on obtient : $\begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = x' + 3y' + 9z' \\ z = x' + 5y' + 25z' \end{cases}$ D'où **:** $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}}$

*23.* Comme $P_0 \neq 0$, la division euclidienne par $P_0$ est possible et

$P(X) = P_0(X)Q(X) + \hat{P}(X)$ avec $d^\circ\left(\hat{P}\right) < 3$

Pour tout couple $(P_1, P_2)$ de polynômes et pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2)$ de nombres réels, on a :

$$\begin{cases} P_1(X) = P_0(X)Q_1(X) + \hat{P}_1(X) \quad d^\circ(P_1) < 3 \\ P_2(X) = P_0(X)Q_2(X) + \hat{P}_2(X) \quad d^\circ(P_2) < 3 \end{cases}$$

D'où $\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) = P_0(X)\left(\lambda_1 Q_1(X) + \lambda_2 Q_2(X)\right) + \left[\lambda_1 \hat{P}_1(X) + \lambda_2 \hat{P}_2(X)\right]$

Or $d^\circ\left(\lambda_1 \hat{P}_1(X) + \lambda_2 \hat{P}_2(X)\right) \leqslant Max\left(d^\circ\left(\hat{P}_1\right), d^\circ\left(\hat{P}_2\right)\right) < 3$, ce qui montre que le reste de la division euclidienne de $\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2$ par $P_0$ est $\lambda_1 \hat{P}_1(X) + \lambda_2 \hat{P}_2(X)$

Donc $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P)_1 + \lambda_2 f(P_2)$, ce qui prouve que **l'application $f$ est linéaire.**

*24.* Il est immédiat que $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_2[X]$.

De plus, si $P$ est un polynôme de $T$, alors $f(P) = P$ car $P = P_0(X) \cdot 0 + P$ avec $d^\circ(P) < 3$.,
ce qui prouve que $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Im} f$

Finalement : $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]}$

*25.* $P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(P) = 0$, ce qui signifie que : $P(X) = P_0(X)Q(X)$, où Q est un polynôme quelconque

Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} f = \{P_0(X)Q(X) / Q(X) \in \mathbb{R}[X]\} = P_0(X)\mathbb{R}[X]}$

*26.* Comme $d^\circ\left(\hat{P}\right) < 3 \quad f\left(\hat{P}\right) = \hat{P}$, soit $f(f(P)) = P \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$ ou $\boxed{f^2 = f}$, ce qui montre que f est un projecteur.

**L'application f est donc la projection sur** $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$ **parallèlement à** $\operatorname{Ker} f = P_0(X)\mathbb{R}[X]$**.**

*27.* Puisque $\hat{P} \in T$, $\hat{P}$ se décompose de manière unique sur la base $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Donc : $\hat{P}(X) = \lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) + \lambda_3 P_3(X)$

On en déduit : $\hat{P}(1) = \lambda_1 P_1(1) = \lambda_1$ car $P_2(1) = 0$ et $P_3(1) = 0$ ;

$\hat{P}(3) = \lambda_2 P_2(3) = \lambda_2$ et $\hat{P}(5) = \lambda_3 P_3(5) = \lambda_3$

En outre $P(X) = P_0(X)Q(X) + \hat{P}(X)$

Comme $P_0(1) = P_0(3) = P_0(5) = 0$, on a : $P(1) = \hat{P}(1), P(3) = \hat{P}(3), P(5) = \hat{P}(5)$

Donc : $\boxed{\hat{P}(X) = P(1)P_1(X) + P(3)P_2(X) + P(5)P_3(X)}$

*28.* Puisque A est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{P}$, $A^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathscr{P}$ à $\mathscr{B}$.

On obtient donc l'inverse de A en décomposant $1, X, X^2$ sur la base $(P_1, P_2, P_3)$.

En utilisant la relation précédente, on obtient, en donnant à P les valeurs $1, X, X^2$ :

$$\boxed{\begin{cases} 1 = P_1(X) + P_2(X) + P_3(X) \\ X = P_1(X) + 3P_2(X) + 5P_3(X) \\ X^2 = P_1(X) + 9P_2(X) + 25P_3(X) \end{cases}} \qquad \text{On retrouve : } \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}}$$

## II

*29.* Un calcul simple prouve que $(M - I)(M - 3I)(M - 5I) = 0$. Comme $M$ et $I$ commutent pour la multiplication $(MI = IM)$, le produit des autres facteurs obtenus par permutation sont égaux au produit précédent. Les différents produits sont donc **tous nuls**.

*30.* Par définition, $E$ est le sous espace vectoriel engendré par $(I, M, M^2)$.

*31.* Remarquons qu'on a : $M^2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 12 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

La relation $xI + yM + zM^2 = 0$ donne :

$$\begin{cases} x + 3y + 13z = 0 \\ 2y + 12z = 0 \\ x + 3y + 9z = 0 \end{cases}.$$

En retranchant la première équation à la dernière, il vient $z = 0$, puis $y = 0$ et enfin $z = 0$.

La famille $(I, M, M^2)$ est donc libre.

Puisqu'elle est génératrice de $E$, c'est donc une base de $E$.

Par suite : $E$ est un espace vectoriel de **dimension 3**.

*32.* Pour tout couple $(\alpha_1,\alpha_2)$ de réels et pour tout couple de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ :

$\begin{cases} P_1(X) = a_1 + b_1X + c_1X^2 \\ P_2(X) = a_2 + b_2X + c_2X^2 \end{cases}$, on a :

$$(\alpha_1P_1(X)+\alpha_2P_2(X)) = (\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)+(\alpha_1b_1+\alpha_2b_2)X+(\alpha_1c_1+\alpha_2c_2)X^2$$

D'où :

$$\Phi[\alpha_1P_1(X)+\alpha_2P_2(X)] = (\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)I+(\alpha_1b_1+\alpha_2b_2)M+(\alpha_1c_1+\alpha_2c_2)M^2$$

$= \alpha_1\left(a_1I+b_1M+c_1M^2\right)+\alpha_2\left(a_2I+b_2M+c_2M^2\right)$ ; donc :

$\Phi(\alpha_1P_1+\alpha_2P_2) = \alpha_1\Phi(P)_1+\alpha_2\Phi(P_2)$, ce qui montre que $\Phi$ est linéaire.

Puisque $\Phi$ transforme la base $1,X,X^2$ en la base $\left(I,M,M^2\right)$, $\Phi$ est bijective.

Ainsi : **$\Phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur *E*.**

*33.* En *28)*, on a montré que $\boxed{\begin{cases} 1 = P_1(X)+P_2(X)+P_3(X) \\ X = P_1(X)+3P_2(X)+5P_3(X) \\ X^2 = P_1(X)+9P_2(X)+25P_3(X) \end{cases}}$

L'isomorphisme $\Phi$ montre que : $\boxed{\begin{cases} \Phi(1) = \Phi(P_1)+\Phi(P_2)+\Phi(P_3) \\ \Phi(X) = \Phi(P_1)+3\Phi(P_2)+5\Phi(P_3) \\ \Phi\left(X^2\right) = \Phi(P_1)+9\Phi(P_2)+25\Phi(P_3) \end{cases}}$

D'où $\boxed{\begin{cases} I = B_1+B_2+B_3 \\ M = B_1+3B_2+5B_3 \\ M^2 = B_1+9B_2+25B_3 \end{cases}}$

*34.* Par définition des $B_i$, on a :

$$\begin{cases} B_1 = P_1(M) = \dfrac{1}{8}(M-3I)(M-5I) \\ B_2 = P_2(M) = -\dfrac{1}{4}(M-I)(M-5I) \\ B_3 = P_3(M) = \dfrac{1}{8}(M-I)(M-3I) \end{cases}$$

Comme dans le produit $\boxed{(M-I)(M-3I)(M-5I)}$, on peut permuter les facteurs, on a :

$$B_1B_2 = -\frac{1}{32}(M-I)(M-3I)(M-5I)(M-5I) = 0(M-5I) = 0$$

De même, on a immédiatement : $\boxed{B_iB_j = 0 \text{ si } i \neq j}$