Auteur du Sujet : M. FONTAINE

CONCOURS COMMUN 2008
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mardi 20 mai 2008 de 8h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve spécifique de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux problèmes sont indépendants.
Barème indicatif : 10 points pour chaque problème.

Premier problème

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, au point M de coordonnées (x, y) on associe l'affixe $m = x + iy$.
Le conjugué de z est noté $\overline{z}$, son module $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, et sa partie réelle $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.
On note $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ le complexe solution de $X^2 + X + 1 = 0$, et on rappelle que $\overline{j} = j^2$.

Etude d'une inégalité

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a| = \mathrm{Re}(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.

Barème : 2+2=4 pts

Solution : $\Leftarrow$: a est réel donc $\mathrm{Re}(a) = a$ et a positif donc $|a| = a$. $\Rightarrow$: $a = 0$ oui, $a \neq 0$ alors $a = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ ce qui donne $\cos\theta = 1$ d'où $\theta = 0(2\pi)$.

2. Soit $z, w \in \mathbb{C}$, montrer l'égalité suivante : $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2\left(|z\overline{w}| - \mathrm{Re}(z\overline{w})\right)$.

Barème : 2=2 pts

Solution : $(|z| + |w|)^2 = z\overline{z} + w\overline{w} + 2|z|.|w|$ et $|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z}$. On remarque que $2|z|.|w| = 2|z\overline{w}|$ et $z\overline{w} + w\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$, ce qui donne l'égalité attendue.

3. En déduire l'inégalité suivante : $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ et montrer qu'il y a égalité si, et seulement si, z et w sont les affixes de deux points situés sur une même demi-droite issue de l'origine.

Barème : 1+2=3 pts

Solution : Si $b \in \mathbb{C}$ on a $\mathrm{Re}(b) \leqslant |\mathrm{Re}(b)|$ (réels) et $|\mathrm{Re}(b)| \leqslant |b|$ (théorème de Pythagore) aussi on en déduit que la quantité à la question précédente est positive, i.e. $(|z| + |w|)^2 \geqslant |z + w|^2$ la fonction $\sqrt{\ }$

étant croissante on a bien $|z+w| \leqslant |z|+|w|$. l'égalité ayant lieu (toujours par la question précédente) si, et seulement si, $|z\overline{w}| = \mathrm{Re}(z\overline{w})$, aussi la première question permet de dire que cela se produit quand $z\overline{w}$ est réel, i.e. z et w ont le même argument ou l'un des deux est nul. Dans tous les cas ces points sont situés sur une même demi-droite issue de l'origine.

La notion de $(p:q)$ point

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
Soient p et q deux réels strictement positifs.

4. Pour $A \neq B$, montrer qu'il existe un unique point d'affixe z vérifiant $\dfrac{z-a}{b-z} = \dfrac{p}{q}$, on l'appelle le $(p:q)$ **point** de A à B. Donner son affixe ainsi qu'une interprétation géométrique.

Barème : 1+1=2 pts

Solution : On obtient $(q+p)z = pb+qa$, comme $p+q \neq 0$ on en déduit que $z = \frac{1}{p+q}(pb+qa)$, donc z est unique et c'est le barycentre de (A,q) et (B,p).

5. Soit $\alpha \in]0,+\infty[$, montrer que le $(p:q)$ **point** de A à B et le $(\alpha p : \alpha q)$ **point** de A à B coïncident.

Barème : 1=1 pt

Solution : Le $(p:q)$ **point** de A à B a pour affixe z vérifiant $\dfrac{z-a}{b-z} = \dfrac{p}{q}$. Le $(\alpha p : \alpha q)$ **point** de A à B a pour affixe t vérifiant $\dfrac{t-a}{b-t} = \dfrac{\alpha p}{\alpha q} = \dfrac{p}{q}$. On a bien $z = t$.

6. Caractériser le $(1:1)$ **point** de A à B.

Barème : 1=1 pt

Solution : C'est le milieu du segment $[A,B]$.

7. A, B, C désignent trois points distincts deux à deux, on notera c l'affixe de C. Soient X le $(p:q)$ **point** de A à B et Y le $(p:q)$ **point** de A à C. Montrer que la droite (XY) est parallèle à la droite (BC).

Barème : 2=2 pts

Solution : La droite (BC) est dirigée par le vecteur d'affixe $c-b$. La droite (XY) est dirigée par le vecteur d'affixe $y-x$, comme $x = \frac{pb+qa}{p+q}$ et $y = \frac{pc+qa}{p+q}$ cela donne $y - x = \frac{p}{p+q}(c-b)$ et comme $\frac{p}{p+q}$ est réel les vecteurs directeurs sont colinéaires.

La notion de $(p:q)$ sous-triangle

On appelle $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(ABC)$, le triangle $\Delta(A'B'C')$ où

A' est le $(p:q)$ **point** de A à B d'affixe a',

B' est le $(p:q)$ **point** de B à C d'affixe b',

C' est le $(p:q)$ **point** de C à A d'affixe c'.

8. Donner l'affixe de l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle $\Delta(ABC)$.

Barème : 1=1 pt

Solution : $\frac{a+b+c}{3}$

9. Montrer que le $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(ABC)$ a le même isobarycentre que $\Delta(ABC)$.

Barème : 2=2 pts

Solution : Il a pour affixe $\frac{a'+b'+c'}{3}$ avec $a' = \frac{pb+qa}{p+q}$, $b' = \frac{pc+qb}{p+q}$ et $c' = \frac{pa+qc}{p+q}$, cela donne $\frac{a'+b'+c'}{3} = \frac{pb+qa+pc+qb+pa+qc}{3(p+q)} = \frac{a+b+c}{3}$.

Etude de suites

On va considérer une suite de triangles $\Delta(A_kB_kC_k)$ construits de la manière suivante.

Le triangle $\Delta(A_0B_0C_0)$ est fixé (les points deux à deux distincts). Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta(A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1})$ est le $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(A_kB_kC_k)$.
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, par a_k, b_k et c_k les affixes respectives des points A_k, B_k et C_k.

10. Montrer que les affixes vérifient la relation matricielle suivante : $\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}$.

Barème : 2=2 pts

Solution : Par la question **4.** on a $a_{k+1} = \frac{pb_k+qa_k}{p+q}$, $b_{k+1} = \frac{pc_k+qb_k}{p+q}$ et $c_{k+1} = \frac{pa_k+qc_k}{p+q}$, qui donnent la relation matricielle attendue.

11. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = a_k + b_k + c_k$, $\beta_k = a_k + jb_k + j^2c_k$, $\gamma_k = a_k + j^2b_k + jc_k$. Vérifier que les suites $(\alpha_k)_k$, $(\beta_k)_k$ et $(\gamma_k)_k$ sont géométriques de raison 1, $\dfrac{q+j^2p}{p+q}$ et $\dfrac{q+jp}{p+q}$ respectivement, et qu'elles sont toutes convergentes en précisant leur limite. (On pourra utiliser la question **3.**.)

Barème : 3+3=6 pts

Solution : Par la question **9.** on a tout de suite que (α_n) est constante ou par calcul $\alpha_{n+1} = \frac{pb_n+qa_n}{p+q} + \frac{pc_n+qb_n}{p+q} + \frac{pa_n+qc_n}{p+q} = a_n + b_n + c_n = \alpha_n$, la suite α_n est géométrique de raison 1, c'est donc une suite constante donc convergente vers $\alpha_0 = a_0 + b_0 + c_0$.

$\beta_{n+1} = \frac{pb_n+qa_n}{p+q} + j\frac{pc_n+qb_n}{p+q} + j^2\frac{pa_n+qc_n}{p+q} = \frac{q+j^2p}{p+q}a_n + b_n\frac{p+jq}{p+q} + c_n\frac{jp+j^2q}{p+q} = \frac{q+j^2p}{p+q}a_n + jb_n\frac{j^2p+q}{p+q} + j^2c_n\frac{j^2p+q}{p+q}$, d'où $\beta_{n+1} = \frac{q+j^2p}{p+q}\beta_n$. On a $\left|\frac{q+j^2p}{p+q}\right| \leqslant \frac{q+1p}{p+q} = 1$ et l'égalité n'a pas lieu puisque q et j^2p ne sont pas sur la même demi-droite issue de O. C'est donc une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, elle converge donc vers 0.

$\gamma_{n+1} = \frac{pb_n+qa_n}{p+q} + j^2\frac{pc_n+qb_n}{p+q} + j\frac{pa_n+qc_n}{p+q} = a_n\frac{q+jp}{p+q} + b_n\frac{p+j^2q}{p+q} + c_n\frac{j^2p+jq}{p+q} = a_n\frac{q+jp}{p+q} + j^2b_n\frac{jp+q}{p+q} + jc_n\frac{jp+q}{p+q}$ donc $\gamma_{n+1} = \frac{q+jp}{p+q}\gamma_n$. On a $\left|\frac{q+jp}{p+q}\right| \leqslant \frac{q+1p}{p+q} = 1$ et l'égalité n'a pas lieu puisque q et jp ne sont pas sur la même demi-droite issue de O. C'est donc une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, elle converge donc vers 0.

On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on va prouver que V est inversible, et préciser son inverse.

12. Soit $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $C = BQ$. Comment se déduit la matrice C de la matrice B ?

Barème : 1=1 pt

Solution : Produit à droite par une matrice de permutation donc la matrice C est la matrice B où les colonnes 2 et 3 ont été échangées, ou par calcul on retrouve le résultat.

13. Montrer que le déterminant de V vaut $3j(j-1)$. Montrer que V est inversible. Calculer V^2, en déduire que V^{-1} est de la forme $\frac{1}{m}VQ$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ à préciser.

Barème : 1+1+1+1=4 pts Déterminant 1pt, inversibilité 1pt, V^2 1pt, expression de V^{-1} 1pt.

Solution : Le calcul par la règle de Sarrus donne $3j^2 - 3j = 3j(j-1) \neq 0$, aussi V est inversible. On a $V^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, donc $V^2Q = 3I_3$ ce qui donne $V^{-1} = \frac{1}{3}VQ$.

14. En remarquant que $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$, en déduire que les suites $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ et $(c_k)_k$ sont toutes les trois convergentes, et préciser leur limite.

Barème : 1+2=3 pts

Solution : On a donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\\ \gamma_n\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\alpha_n+\beta_n+\gamma_n\\ \alpha_n+j^2\beta_n+j\gamma_n\\ \alpha_n j\beta_n+j^2\gamma_n\end{pmatrix} \to \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a_0+b_0+c_0\\ a_0+b_0+c_0\\ a_0+b_0+c_0\end{pmatrix},$$

comme combinaisons linéaires de suites convergentes.

Etude d'une application linéaire

On définit l'application suivante : $\varphi: \begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})\\ M & \longmapsto & V^{-1}MV\end{array}$

15. Montrer que φ est une application linéaire qui vérifie $\forall (M,N)\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})^2$, $\varphi(MN)=\varphi(M)\varphi(N)$.

Barème : 2+1=3 pts

Solution : On a $\varphi(\lambda M+\mu N)=\lambda\varphi(M)+\mu\varphi(N)$ et $\varphi(MN)=V^{-1}MVV^{-1}NV=\varphi(M)\varphi(N)$.

16. On considère l'application ψ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $\psi(M)=VMV^{-1}$. Calculer $\psi\circ\varphi$. Montrer que φ est une application bijective.

Barème : 2=2 pts

Solution : On a $\psi\circ\varphi(M)=\psi(V^{-1}MV)=VV^{-1}MVV^{-1}=M$, donc $\psi\circ\varphi=\mathrm{Id}$, aussi l'application $M\mapsto VMV^{-1}$ est l'application réciproque de φ, elle est donc bijective.

17. On pose $A_{(p,q)}=\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q&p&0\\0&q&p\\p&0&q\end{pmatrix}$. Calculer $A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, montrer que $A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}=\dfrac{q+jp}{p+q}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$, et donner une expression similaire pour $A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$.

Barème : 3=3 pts

Solution : $A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}=\frac{q+jp}{p+q}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$, et $A_{(p,q)}\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}=\frac{q+j^2p}{p+q}\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$

18. En déduire, sans calcul, que $\varphi(A_{(p,q)})=D$ où D est une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

Barème : 2=2 pts Un candidat qui calcule le produit $V^{-1}A_{(p,q)}V$ et qui trouve la bonne matrice D aura 1pt.

Solution : La formule de changement de base nous permet d'écrire $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{q+jp}{p+q}&0\\0&0&\frac{q+j^2p}{p+q}\end{pmatrix}$.

19. On rappelle que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ est un anneau commutatif, en déduire que deux matrices quelconques de l'ensemble $\left\{A_{(p,q)}/(p,q)\in]0,+\infty[\right\}$ commutent.

Barème : 2=2 pts

Solution : On a $\varphi(A_{(p,q)})=D$ et $\varphi(A_{(p',q')})=D'$ or $DD'=D'D$ donc $\varphi(A_{(p,q)}A_{(p',q')})=\varphi(A_{(p,q)})\varphi(A_{(p',q')})=\varphi(A_{(p',q')})\varphi(A_{(p,q)})=\varphi(A_{(p',q')}A_{(p,q)})$, le caractère bijectif de φ permet de conclure à $A_{(p,q)}A_{(p',q')}=A_{(p',q')}A_{(p,q)}$.

20. Montrer que $A_{(1,n)}\dots A_{(1,2)}A_{(1,1)}=VD_nV^{-1}$ où D_n est une matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux $(1,\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+j}{k+1},\prod_{k=1}^{n}\frac{k+j^2}{k+1})$. Montrer que les suites $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+j}{k+1}\right)_n$ et $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+j^2}{k+1}\right)_n$ sont convergentes vers 0. (On pourra admettre que $\left|1+\dfrac{j}{k}\right|\leqslant 1$ et $\left|1+\dfrac{j^2}{k}\right|\leqslant 1$.)

Barème : 2+2=4 pts

Solution : On a $A_{(1,n)} = V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+j}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+j^2}{n+1} \end{pmatrix} V^{-1}$ puis produit. $\left|\frac{k+j}{k+1}\right| = \frac{k}{k+1}\left|1+\frac{j}{k}\right| \leqslant \frac{k}{k+1}$

$\left|\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$, de même pour l'autre produit.

Deuxième problème

Etude d'une fonction

21. Etudier sur $]0,+\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes, les extrema et asymptotes éventuels.

Barème : 1+1+1+1+1+1=6 pts . Avec 1pt pour le domaine, 1pt pour le signe de la dérivée, 1pt pour la limite en $+\infty$ et 1pt pour l'asymptote horizontale, 1 pt pour le maximum, 1pt pour la limite en 0.

Solution : On a $f(x) = \exp(\frac{\ln x}{x})$, elle est définie sur $]0,+\infty[$, dérivable sur ce domaine et $f'(x) = f(x)\frac{1-\ln x}{x^2}$, le signe de $x \mapsto 1-\ln x$ suffit pour obtenir les variations de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

On a $\frac{\ln x}{x}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ (puissances comparées), aussi il y a une asymptote horizontale $y = 1$. Et en 0 on a $\frac{\ln x}{x}$ qui tend vers $-\infty$ donc f tend vers 0. f possède un maximum en e qui vaut $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

22. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0. Ce prolongement sera encore noté f. Préciser la valeur de f en 0.

Barème : 1=1 pt

Solution : Par ce qui précéde on pose $f(0) = 0$.

23. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Barème : 2=2 pts

Solution : On remarque que $\frac{f(x)}{x} = \exp\left(\frac{\ln x}{x} - \ln x\right) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}(1-x)\right)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0, donc $f'(0) = 0$.

24. Montrer que f est une bijection de $]0,\mathrm{e}]$ sur $]0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$.

Barème : 2=2 pts

Solution : f est strictement croissante, continue sur l'intervalle $]0,\mathrm{e}]$, elle réalise donc une bijection de $]0,\mathrm{e}]$ sur $]\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(\mathrm{e})] =]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$.

25. La fonction réciproque de f est-elle continue, dérivable sur $]0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$?

Barème : 1+1=2 pts

Solution : La fonction réciproque obtenue dans la question précédente est bien continue sur $]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$ par un théorème de cours, mais elle est dérivable sur $]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}[$ seulement puisque $f'(\mathrm{e}) = 0$.

Etude d'une suite

Soit x un réel fixé strictement positif. On pose $\Phi_x(t) = x^t$, et on définit la suite $(t_n)_n$ de la manière suivante

$$t_0 = 1, \qquad t_{n+1} = \Phi_x(t_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la suite $(t_n)_n$ est convergente on note $h(x)$ sa limite dans $\mathbb{R}$.

26. Si $x = 1$, que peut-on dire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$?

Barème : 1=1 pt

Solution : Suite constante à 1, donc convergente vers 1.

27. Justifier que si $h(x)$ existe (c'est-à-dire la suite $(t_n)_n$ est convergente) alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$, en déduire dans ce cas que $f(h(x)) = x$.

Barème : 2+1=3 pts

Solution : Si la suite t_n converge vers $h(x)$ alors la suite t_{n+1} converge aussi vers $h(x)$. Mais $t_{n+1} = \Phi_x(t_n)$, et la fonction $\Phi_x(t) = \exp(t \ln x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, aussi $\Phi_x(t_n)$ converge vers $\Phi_x(h(x))$. Par unicité de la limite on en déduit que $\Phi_x(h(x)) = h(x)$, ou encore $x^{h(x)} = h(x)$. On peut se convaincre par une récurrence immédiate que la suite t_n est à valeurs strictement positives, aussi sa limite $h(x)$ est positive ; ou bien par la relation $h(x) = x^{h(x)} = \exp(h(x)\ln x) > 0$. En composant par f il vient $f(h(x)) = f\left(x^{h(x)}\right) = \left(x^{h(x)}\right)^{\frac{1}{x^{h(x)}}} = \left(x^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}} = \exp\left(\frac{1}{h(x)} \ln\left(x^{h(x)}\right)\right) = \exp(\ln(x)) = x$.

On va traiter le cas $\underline{x > 1}$:

28. Montrer que pour $x \in]1, +\infty[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Barème : 1=1 pt

Solution : On a $\Phi_x'(t) = (\ln x)\Phi_x(t)$, comme $x > 1$ on a $\ln x > 0$ aussi $\Phi_x'(t) > 0$ pour $t \in \mathbb{R}$.

29. Soit $x > 1$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n < t_{n+1}$.

Barème : 2=2 pts . Tout argument du genre Φ_x croissante alors $(t_n)_n$ croissante 0pt.

Solution : On a bien sur $1 < x$ donc $t_0 < t_1$, supposons que $t_n < t_{n+1}$ alors la croissance de Φ_x sur $\mathbb{R}$ donne $t_{n+1} = \Phi_x(t_n) < \Phi_x(t_{n+1}) = t_{n+2}$. On a prouvé par récurrence sur n que $t_n < t_{n+1}$. $(t_n)_n$ est croissante et même strictement croissante.

30. On suppose que $x \in]1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leqslant \mathrm{e}$. En déduire que dans ce cas la suite $(t_n)_n$ est convergente.

Barème : 1+1=2 pts

Solution : Récurence sur n, $t_0 = 1 \leqslant \mathrm{e}$, on suppose que $t_n \leqslant \mathrm{e}$ alors $0 < \ln x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ d'où $t_n \ln x \leqslant 1$ en composant par l'exponentielle on a bien $t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$. La question précédente a permis de montrer que la suite $(t_n)_n$ était croissante, on vient de démontrer qu'elle est majorée par e donc elle est convergente.

31. On suppose $x > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, et on veut montrer que la suite $(t_n)_n$ a pour limite $+\infty$. On pourra supposer que la suite est convergente vers $h(x)$ et en utilisant les questions **27.** et **21.** aboutir à une contradiction. Conclure.

Barème : 2+1=3 pts , 1pt pour la conclusion.

Solution : Du fait de la croissance de la suite t_n on a $h(x) \geqslant t_n \geqslant t_1 = x$ et dans cette question $x > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, mais la question **27.** donne $x = f(h(x))$ et la question **21.** permet de dire que $\mathrm{Im}\, f \subset [0, \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$ donc $x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, d'où une contradiction. Donc la suite $(t_n)_n$ est divergente, mais comme elle est croissante, c'est que sa limite est $+\infty$.

On va étudier le cas $\underline{x \in]0, 1[}$:

32. Montrer que pour $x \in]0, 1[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$?

Barème : 1+1=2 pts

Solution : Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $\Phi_x'(t) = (\ln x)\Phi_x(t) < 0$, puisque $\ln x < 0$, donc Φ_x est décroissante, aussi $\Phi_x \circ \Phi_x$ est croissante.

33. Pour $0 < x < 1$, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2n+1} < t_{2n}$.

Barème : 2=2 pts

Solution : Pour $n = 0$ oui $t_1 = x < 1 = t_0$. Par récurrence en partant de $t_{2n+1} < t_{2n}$ on en déduit, puisque $\Phi_x \circ \Phi_x$ est croissante, que $t_{2n+3} < t_{2n+2}$.

34. On suppose que $0 < x < 1$. Montrer par récurrence que la suite extraite $(t_{2n})_n$ est décroissante, puis que la suite extraite $(t_{2n+1})_n$ est croissante.

Barème : 2+1=3 pts . 2pts pour une, 1pt pour l'autre.

Solution : Dans ce cas $\ln x < 0$, donc $t_2 = \exp(x \ln x) < 1 = t_0$. Si on suppose que $t_{2n+2} < t_{2n}$ alors $t_{2n+1} < t_{2n+3}$, mais dans ce cas on a $t_{2n+4} < t_{2n+2}$, ce qui assure la monotonie (décroissance) de la suite

$(t_{2n})_n$. De même on prouve que la suite des indices impairs est croissante du fait de l'inégalité, $t_1 < t_3$ qui s'obtient en remarquant que $t_2 = x^x = \exp(x \ln x) < 1 = t_0$ puisque $(\ln x < 0)$ en composant par Φ_x qui est décroissante cela donne $t_1 < t_3$.

35. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes, et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0, 1]$, c'est-à-dire une solution de $(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) = t$ dans $[0, 1]$.

Barème : 1+1+2=4 pts . 1pt pour un bon majorant, 1pt pour un bon minorant, 2pts pour point fixe avec argument de continuité.

Solution : A partir de $t_{2n+1} < t_{2n}$ et la croissance de $(t_{2n+1})_n$ on obtient $t_1 < t_{2n+1} < t_{2n}$ et la décroissance de $(t_{2n})_n$ permet d'obtenir $t_1 < t_{2n+1} < t_{2n} < t_0$. On en déduit que les suites sont bornées étant monotones elles sont convergentes, les limites étant dans $[t_1, t_0] = [x, 1] \subset [0, 1]$. $t_{2n+2} = \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n})$, et $(t_{2n+2})_n$ a même limite que $(t_{2n})_n$ du fait de la continuité de $\Phi_x \circ \Phi_x$ la limite est un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ et elle appartient à $[0, 1]$, même démarche pour $(t_{2n+1})_n$.

Détermination des points fixes

La suite du problème consiste à déterminer l'ensemble des points fixes de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0, 1]$. Pour cela on pose $g(t) = (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$, on admettra le résultat suivant :

$$g'(t) = \Phi_x'(t).\left(\Phi_x' \circ \Phi_x\right)(t) - 1 = (\ln x)^2.\Phi_x(t).\left(\Phi_x \circ \Phi_x\right)(t) - 1$$

36. Dans le cas $x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1[$ on admet que l'on obtient le tableau suivant :

t	0		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x		$x^x - 1$

Préciser le signe de $g'(0)$. Quelle est la monotonie de g sur $[0, 1]$? Montrer que $\Phi_x \circ \Phi_x$ n'a qu'un seul point fixe dans $[0, 1]$. Conclusion pour la convergence de la suite $(t_n)_n$.

Barème : 1+1+1=3 pts . g' négatif 1 pt, 1pt pour $g(t) = 0$ unique racine, 1 pt pour la convergence des suites.

Solution : On a pour $x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1[$ $0 \leqslant (\ln x)^2 \leqslant 1$ donc $0 \leqslant x(\ln x)^2 \leqslant x < 1$, aussi $g'(0) < 0$ et donc $g'(t) < 0$, la fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1]$ étant positive en 0 (valeur x) et négative en 1 (valeur $x^x - 1 = \exp(x \ln x) - 1 < 0$) le théorème des bijections permet de dire que g s'annule en un unique point p qui vérifie $\Phi_x \circ \Phi_x(p) = p$, i.e. un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$. En conclusion les suites $(t_{2n})_n$ et $(t_{2n+1})_n$ sont convergentes vers p, aussi (t_n) est convergente vers p.

37. Dans le cas $x \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$ on admet que l'on a le tableau suivant :

t	0		α		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x				$x^x - 1$

où α est l'unique racine de g'' sur $]0, 1[$ et $\beta = g'(\alpha) = -\mathrm{e}^{-1} \ln x - 1$. Préciser le signe de β lorsque $x \in [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}[$. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$ lorsque $x \in [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}[$?

Barème : 1+1=2 pts

Solution : Si $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leqslant x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors $-\mathrm{e} \leqslant \ln x < -1$ ce qui donne $\mathrm{e}^{-1} < -\mathrm{e}^{-1} \ln x \leqslant 1$, donc $\beta \leqslant 0$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et comme $x > 0$ et $x^x - 1 < 0$, g possède une unique racine ou $\Phi_x \circ \Phi_x$ a un unique point fixe. Les mêmes arguments qu'à la question précédente permettent de conclure à la convergence de la suite $(t_n)_n$.

38. On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que $x \in]0, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}[$. Et on admet que le tableau de variation est de la forme suivante :

t	0		γ		α		δ		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\beta > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1 < 0$
$g(t)$	x	$\searrow$	$g(\gamma)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$g(\delta)$	$\searrow$	$x^x - 1$

avec $\gamma < \alpha < \delta$ et $g'(\gamma) = g'(\delta) = 0$. On admet aussi que Φ_x possède un unique point fixe dans $]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$ que l'on note p, donc $\Phi_x(p) = p$. Montrer que $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$ et en déduire le signe de $g'(p)$. En déduire que $\Phi_x \circ \Phi_x$ possède trois points fixes p_1, p, p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$.

Barème : 1+1+2=4 pts

Solution : $g'(p) = (\ln x)^2 \Phi_x(p) \Phi_x \circ \Phi_x(p) - 1 = (\ln x)^2 p^2 - 1$, mais $\Phi_x(p) = p$ donne $\exp(p \ln x) = p$ ou encore $p \ln x = \ln p$, on a donc $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$.

Comme $p < \frac{1}{\mathrm{e}}$ on a $g'(p) > 0$. La condition $g'(p) > 0$ impose que $p \in]\gamma, \delta[$ et donc $g(\gamma) < g(p) = 0$ et $0 = g(p) < g(\delta)$. Comme $g(0) = x > 0$ et g continue strictement décroissante sur $[0, \gamma]$ elle doit s'annuler une seule fois en $p_1 \in]0, \gamma[$. De même $g(\delta) > 0$ et $g(1) = x^x - 1 < 0$ la monotonie de g et sa continuité donne l'existence d'un unique $p_2 \in]\delta, 1[$ point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$.

39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_2 \leqslant t_{2n}$, et que la suite $(t_{2n})_n$ est convergente vers p_2.

Barème : 2=2 pts

Solution : On a montré que $p_2 < 1 = t_0$, supposons qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $p_2 < t_{2n}$ en composant par $\Phi_x \circ \Phi_x$ qui est croissante, on a $p_2 < t_{2n+2}$. La suite $(t_{2n})_n$ est décroissante minorée par p_2 donc elle est convergente (vers un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$), mais le seul point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[p_2, 1]$ est p_2.

40. On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $t_{2n+1} \leqslant p$. Pour cela, on supposera qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p < t_{2n_0+1}$ et on aboutira à une contradiction. Que peut-on conclure sur la convergence de $(t_{2n+1})_n$? La suite $(t_n)_n$ est-elle convergente ?

Barème : 1+1+1=3 pts

Solution : Si $p < t_{2n_0+1}$ en composant par Φ_x on obtient $p > t_{2n_0+2}$, or la suite t_{2n} est décroissante donc pour $n \geqslant n_0$ on a $t_{2n+2} \leqslant t_{2n_0+2} < p < p_2$ ce qui contredit la convergence de $(t_{2n})_n$ vers p_2. Donc pour tout n on a $t_{2n+1} \leqslant p$, la suite $(t_{2n+1})_n$ est croissante majorée donc convergente vers p_1 ou p mais pas vers p_2, aussi la suite $(t_n)_n$ est divergente lorsque $x \in]0, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}[$.