Épreuve spécifique de Mathématiques.

Corrigé analyse.

I

1 L'application f est produit et composée de fonction C^{∞} donc est C^{∞}. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=3\exp(-x^2)-6x^2\exp(-x^2)=(3-6x^2)\exp(-x^2)$. $f'(x)$ est du même signe que $3-6x^2$ qui s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est positif sur $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ et négatif sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

Si $x>0$ $3x\exp(-x^2)=\frac{3x}{e^{x^2}}=3\frac{\sqrt{x^2}}{e^{x^2}}$ donc a pour limite 0 en $+\infty$ donc si f a pour limite -1 en $+\infty$

Si $x<0$ $3x\exp(-x^2)=\frac{3x}{e^{x^2}}=3\frac{-\sqrt{x^2}}{e^{x^2}}$ donc a pour limite 0 en $+\infty$ donc si f a pour limite -1 en $-\infty$

D'où le tableau de variations :

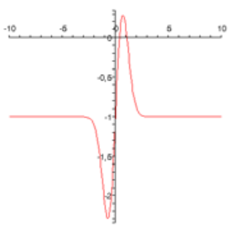
X	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	0	–	
f(x)	–1	↓		↑		↓	–1

La droite $y=-1$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 $f''(x)=-12x\exp(-x^2)-2x(3-6x^2)\exp(-x^2)=(12x^3-18x)\exp(-x^2)$. $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en 0 donc le point d'abscisse 0 de C_f est un point d'inflexion.

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x-1$.
Soit $g(x)=3x-1$. $f(x)-g(x)=3x\exp(-x^2)-1-(3x-1)=3x(\exp(-x^2)-1)$ Pour tout x de $\mathbb{R}^*$ $\exp(-x^2)<1$ car $x^2>0$ donc $\exp(-x^2)-1<0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ donc $f(x)-g(x)$ est du signe contraire à x donc change de signe en 0. On retrouve que C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

4.



5a f est C^{∞} sur $\mathbb{R}$ donc admet en 0 des DL jusqu'à n'importe quel ordre.

b $\exp(-x^2)=1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$ donc $f(x)=3x(1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4))-1=-1+3x-3x^3+\frac{3}{2}x^5+o(x^5)$.

6. Une primitive de $x \to \dfrac{n-2x^2}{x}$ est $x \to n\ln(|x|)-x^2$ donc les solutions de H_n sur les deux domaines d'intégration sont les applications de la forme $x \to \lambda\exp(n\ln(|x|-x^2)=\lambda|x|^n\exp(-x^2)$ où λ est un réel quelconque.
Sur $]0,+\infty[$ les solutions de H_n sont de la forme $x \to \lambda x^n\exp(-x^2)$ où λ est un réel quelconque.
Sur $]-\infty, 0[$ les solutions de H_n sont de la forme $x \to \alpha(-1)^n x^n\exp(-x^2)$ où α est un réel quelconque. Si on pose $\lambda=(-1)^n\alpha$ les solutions de H_n sur $]-\infty,0[$ sont de la forme $x \to \lambda x^n\exp(-x^2)$ où λ est un réel quelconque.
7. $x \to -1$ est une solution évidente de E_n. Donc les solutions de E_n sur les deux domaines d'intégration sont les applications de la forme $x \to \lambda x^n\exp(-x^2)-1$ où λ est un réel quelconque.
8. Analyse : Soit f définie de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solution de E_n sur $\mathbb{R}$. Donc f est solution de E_n sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ donc il existe α et λ tels que : $\forall x>0$ $f(x)=\lambda x^n\exp(-x^2)$ et $\forall x<0$ $f(x)=\alpha x^n\exp(-x^2)$ donc $\forall x>0$ $f'(x)=\lambda(nx^{n-1}-2x^{n+1})\exp(-x^2)$ et $\forall x<0$ $f'(x)=\alpha(nx^{n-1}-2x^{n+1})\exp(-x^2)$
Si $n\neq 1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$.
Si $n=1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lambda$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\alpha$ donc comme cette limite à gauche et à droite doit être égale à $f'(0)$ alors on doit avoir $\lambda=\alpha$.

Réciproquement : si $\boldsymbol{n=1}$ alors l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\lambda xe^{-x^2}-1$ est bien définie de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et est bien de la forme des solutions sur $]0, +\infty[$ et $]0,+\infty[$*
$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\lambda(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2})$ donc $f'(0)=\lambda$ et $f(0)=-1$ donc $0f'(0)-(1-2\times 0^2)f(0)=(-1)\times(-1)=1=1-2\times 0$ donc f est solution en 0 donc sur $\mathbb{R}$.
Si $\boldsymbol{n\geq 2}$ Soit α et λ 2 réels quelconques Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=-1$ $\forall x>0$: $f(x)==\lambda x^n\exp(-x^2)-1$, $\forall x<0$: $f(x)==\alpha x^n\exp(-x^2)-1$. f est bien de la forme des solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ et f est de classe C^1 sur $]0, +\infty\ [$ et sur $]-\infty, 0[$. De même que précédemment f est solution en 0. De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ donc f est continue en 0.
$\forall x>0$: $f'(x)=\lambda(nx^{n-1}-2x^{n+1})\exp(-x^2)$ et $\forall x<0$: $f'(x)=\alpha(nx^{n-1}-2x^{n+1})\exp(-x^2)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$
comme f est définie continue sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de Lagrange on a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ donc f est dérivable en 0 et sa dérivée est égale à 0.
comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ alors f' est continue en 0, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III

9. $f_n(0)=-1<0$ $f_n(1)=\dfrac{3}{e}-1$ comme $e<3$ on a $f(1)>0$.
10. $\forall x\geq 0$ $f_n'(x)=(3nx^{n-1}-6x^{n+1})e^{-x^2}=3x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$. Donc $f_n'(x)$ est du même signe que $n-2x^2$ donc s'annule en $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ est positif si $x<\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et négatif sinon $\dfrac{x^n}{e^{x^2}}=\dfrac{(x^2)^{\frac{n}{2}}}{e^{x^2}}$ donc tend vers 0 donc $f_n(x)$ tend vers -1 en $+\infty$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$	$+\infty$
f '(x)		+	0	–
f(x)	–1	↑	$f(\sqrt{\dfrac{n}{2}})$	↓ –1

f est continue et strictement croissante sur $[0,\sqrt{\frac{n}{2}}]$ donc est une bijection entre $[0,\sqrt{\frac{n}{2}}]$ et $f([0,\sqrt{\frac{n}{2}}])=[-1,f(\sqrt{\frac{n}{2}})]$ Or $0<1<\sqrt{\frac{n}{2}}$ donc $0<f(1)<f(\sqrt{\frac{n}{2}})$ donc 0 appartient à $f([0,\sqrt{\frac{n}{2}}])$ donc il existe u_n unique de $[0,\sqrt{\frac{n}{2}}]$ tel que $f(u_n)=0$ comme $f(u_n)=0<f(1)$ comme f est une bijection strictement croissante $u_n<1$. On montre de même qu'il existe v_n unique de $[\sqrt{\frac{n}{2}},+\infty[$ tel que $f(v_n)$ car f strictement décroissante et continue sur $[\sqrt{\frac{n}{2}},+\infty[$.

donc pour tout n de $\mathbb{N}$ $n\geq 2$ il existe u_n et v_n uniques qui annulent f et tels que : $u_n<1<\sqrt{\frac{n}{2}}<v_n$.

11 $(v_n)_{n\geq 2}$ est minorée par la suite $(\sqrt{\frac{n}{2}})_{n\geq 2}$ qui diverge vers $+\infty$ donc diverge vers $+\infty$.

12

a) $f_n(u_n)=0$ donc $3u_n^n e^{-u_n^2}=1$ donc $e^{-u_n^2}=\frac{1}{3u_n^n}$.

b) $f_{n+1}(x)=3x^{n+1}e^{-x^2}-1$ donc $f_{n+1}(u_n)=3u_n^{n+1}e^{-u_n^2}-1=3\frac{u_n^{n+1}}{3u_n^n}-1=u_n-1<0$ car $u_n<1$.

c) Or f_{n+1} est une bijection strictement croissante sur $[0,\frac{\sqrt{n+1}}{2})$ donc comme $f_{n+1}(u_n)<0=f_{n+1}(u_{n+1})$ donc $u_n<u_{n+1}$ la suite (u_n) est strictement croissante.

d) (u_n) est croissante et majorée par 1 donc est convergente vers $l\leq 1$.

13

a) $f_n(t)=0\Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2}-1=0\Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2}=1\Leftrightarrow \ln(3t^n e^{-t^2})=\ln(1)=0\Leftrightarrow \ln(3)+\ln(t^n)+\ln(e^{-t^2})=0$
$\Leftrightarrow \ln(3)+n\ln(t)-t^2=0\Leftrightarrow g_n(t)=0$.

b) On a $\ln(3)+n\ln(u_n)-u_n^2=0$ car $f_n(u_n)=0\Leftrightarrow g_n(u_n)=0$. Si (u_n) converge vers $l\neq 1$ alors $(\ln(u_n))$,converge vers $\ln l<0$ et(u_n^2)converge vers l^2 donc $(n\ln(u_n))$ diverge vers $-\infty$ donc $((\ln(3)+n\ln(u_n)-u_n^2)$. diverge vers $-\infty$ ce qui est impossible car elle vaut toujours 0 donc $l=1$.

c) On a $\ln(3)+n\ln(u_n)-u_n^2=0$ donc $\ln(3)+n\ln(1+w_n)-(1+w_n)^2=0$ donc en utilisant le D.L de $\ln(1+x)$ jusqu'à l'ordre 1 [$\ln(1+x)=x+o(x)$] on a $\ln(3)+n(w_n+o(w_n))-1-2w_n-w_n^2=0$ donc $w_n(n-w_n+o(1)-2)=1-\ln(3)$ donc $\frac{w_n n}{1-\ln 3}=\frac{n}{n-w_n+o(1)-2}$ donc tend vers 1 si n tend vers $+\infty$ donc la suite (w_n) est équivalente à $(\frac{1-\ln 3}{n})$.

IV

14

a) g_2 et y sont C^∞ sur $]0,+\infty[$. $\forall t>0$ $g_2'(t)=\frac{2}{t}-2t=\frac{2(1-t^2)}{t}$ donc $g_2'(t)$ est du même signe que $1-t^2$ donc est négatif sur $]1,+\infty[$ et positif sur $]0,1[$. $y'(t)=1-t^2$ donc est du même signe que $g_2'(t)$.

en $+\infty$ $g_2(t)=t^2(\frac{\ln 3}{t^2}+2\frac{\ln t}{t^2}-1)$. Or $(\frac{\ln 3}{t^2}+2\frac{\ln t}{t^2}-1)$ a pour limite -1 en $+\infty$ donc $g_2(t)$ a pour

limite –∞ en +∞ $y(t)$ a même limite en +∞ que $-t^3$ donc a pour limite **–∞.**
en 0 $\ln(t)$ tend vers –∞ $\ln(3)-t^2$ tend vers $\ln(3)$ donc $\ln(3)+2\ln(t)-t^2$ tend vers –∞ tandis que $y(t)$ tend vers 0 d'où le tableau de variations :

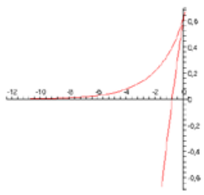
t	0	1	+∞
x'	+	0	–
x	–∞ ↑	ln3–1	↓ –∞
y	0 ↑	$\frac{2}{3}$	↓ –∞
y'	+	0	–

b) **En 0** x tend vers –∞ et y tend vers 0 donc la droite $y=0$ est asymptote en $t=0$
en +∞ x et y tendent vers –∞. On forme :

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{t-\frac{1}{3}t^3}{\ln 3+2\ln t-t^2}=\frac{t^3}{t^2}\frac{1-\frac{1}{3t}}{\ln 3+2\frac{\ln t}{t^2}-1}=t\frac{1-\frac{1}{3t}}{\ln 3+2\frac{\ln t}{t^2}-1}$$ donc tend vers +∞. La courbe admet une branche parabolique de direction Oy.

c) $x'(1)=0=y'(1)$ donc $M(1)$ est un point stationnaire. $\forall t>0$ $x''(t)=-\frac{2}{t^2}-2$ et $y''(t)=-2t$ de même $x^{(3)}(t)=\frac{4}{t^3}$ et $y^{(3)}(t)=-2$ donc le vecteur $\overrightarrow{M''}(1)$ a pour coordonnées (–4,–2) et est non nul donc $p=2$ et $\overrightarrow{M^{(3)}}(1)$ a pour coordonnées ((4,–2) donc n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{M''}(1)$ donc $q=3$. On a un point de rebroussement de première espèce et la tangente est dirigée par $\overrightarrow{M''}(1)$.

15



Épreuve spécifique de Mathématiques

Corrigé algèbre.

I

16

a) Soit $\delta=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ $\delta^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ donc $\delta^2=-3+4i$ si et seulement si

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \\ a^2+b^2=|\delta|^2=|-3+4i|=\sqrt{9+16}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=2 \\ 2b^2=8 \\ 2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \text{ et } b=2 \\ \text{ou } a=-1 \text{ et } b=-2 \end{cases}$$

donc les racines carrées de $-3+4i$ sont $1+2i$ et $-1-2i$.

b) Le discriminant de $U(X)$ est $(1-2i)^2-4(-2i)=1-4i-4+8i=-3+4i$. Donc les racines de $U(X)$ sont : $z_1=\dfrac{-1+2i+1+2i}{2}=2i$ et $z_2=\dfrac{-1+2i-1-2i}{2}=-1$.

17

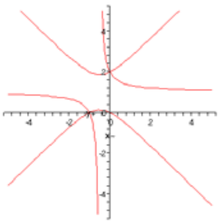
a) Si $z=x+yi$ avec x et y réels $U(z)=z^2+(1-2i)z-2i=(x+iy)^2+(1-2i)(x+iy)-2i=x^2-y^2+2ixy+x-2ix+iy+2y-2i$ $=(x^2-y^2+x+2y)+i(2xy-2x+y-2)$. La partie réelle de $U(z)$ est x^2-y^2+x+2y et sa partie imaginaire est $2xy-2x+y-2$.

b)

i) $U(x+iy)$ est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle donc si et seulement si $x^2-y^2+x+2y=0$ donc si et seulement si $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-(y-1)^2+1=0$ donc si et seulement si $(x+\frac{1}{2})^2-(y-1)^2=-\frac{3}{4}$ donc si et seulement si $-\dfrac{(x+\frac{1}{2})^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2}+\dfrac{(y-1)^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2}=1$ c'est l'équation réduite de type $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ d'une hyperbole de centre le point C de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 1)$ équilatère avec $a=b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ donc l'excentricité e est égal à $\sqrt{2}$ car si $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2+(\frac{2}{\sqrt{3}})^2}=\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$ et $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$. Les asymptotes sont les premières et deuxièmes bissectrices dans le repère $(C, \vec{j}, \vec{i})$.

ii) $U(x+iy)$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle si et seulement si $2xy-2x+y-2=0$ si et seulement si $(2x+1)y=2x+2$ donc si et seulement si $x\neq-\frac{1}{2}$ et

$y=\frac{2x+2}{2x+1}=\frac{2x+1+1}{2x+1}=1+\frac{1}{2x+1}$ donc si et seulement si $x\neq-\frac{1}{2}$ et $y-1=\frac{1}{2x+1}$. Soit A le point de coordonnées $(-\frac{1}{2},1)$ Soit R' le repère $(A, \frac{1}{2}\vec{i},\vec{j})$. Soit (X, Y) les coordonnées de M dans R' alors $\overrightarrow{AM}=X\frac{1}{2}\vec{i}+Y\vec{j}$ Or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x+\frac{1}{2}, y-1)$ donc $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}X$ et $y-1=Y$ donc $X=2x+1$ et $Y=y-1$ donc Γ_2 a pour équation dans R' $Y=\frac{1}{X}$. C'est donc une hyperbole de centre le centre de R' et d'asymptotes l'axe de X et l'axe de Y donc les droites $x=-\frac{1}{2}$ et $y=1$.



II

18 Soit P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ Soit α de $\mathbb{C}$ Soit $Q_1(X)$ et $R_1(X)$ les quotient et reste de la division euclidienne de $P_1(X^2)$ par $T(X)$ alors. Soit $Q_2(X)$ et $R_2(X)$ les quotient et reste de la division euclidienne de $P_2(X^2)$ par $T(X)$ donc : deg $(R_1(X))<\deg(T)$ et : $\deg(R_2(X)<\deg(T(X)$ et :$P_1(X^2)=Q_1(X)T(X)+R_1(X)$ et $P_2(X^2)=Q_2(X)T(X)+R_2(X)$ donc $(\alpha P_1+P_2)(X^2)=\alpha P_1(X^2)+P_2(X^2)=\alpha(Q_1(X)T(X)+R_1(X))+Q_2(X)T(X)+R_2(X)=(\alpha Q_1(X)+Q_2(X))T(X)+\alpha R_1(X)+R_2(X)$.
Or $\deg(\alpha R_1(X)+R_2(X))<\sup(\deg(\alpha R_1(X), R_2(X))$. Si $\alpha=0$ alors $\deg(\alpha R_1(X))=-\infty\leq\deg(R_1(X)<\deg(T(X)$. Si $\alpha\neq0$ alors $\deg(\alpha R_1(X))=\deg(R_1(X)<\deg(T(X))$. Donc $\sup(\deg(\alpha R_1(X), R_2(X))<\deg(T(X))$ donc $\alpha R_1(X)+R_2(X)$ est le reste de la division de $\alpha P_1(X^2)+P_2(X^2)$ par $T(X)$ et $\alpha Q_1(X)+Q_2(X)$ son quotient. Donc $f(\alpha P_1(X)+P_2(X))=\alpha Q_1(X)+Q_2(X)+X(\alpha R_1(X)+R_2(X))=\alpha(Q_1(X)+XR_1(X))+Q_2(X)+XR_2(X)=\alpha f(P_1(X))+f(P_2(X))$ donc f est linéaire.

19 Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. Soit p son degré. On a donc : $p\leq n$ $P(X^2)$ est de degré $2p$. Soit $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$ et $R(X)$ son reste. Or $\deg(R(X))<\deg(T(X))=n$ donc $\deg(XR(X))=\deg(X)+\deg(R(X))=1+\deg(R(X)\leq n$. $\deg(Q(X))=0$ si $2p<n$ et à $2p-n$ si $2p\geq n$ or $2p-n\leq 2n-n=n$ donc dans tous les cas $\deg(Q(X))\leq n$. Or $f(P(X))=Q(X)+XR(X)$ donc $\deg(f(P(X)))\leq\sup(\deg(Q(X)),\deg(XR(X))\leq n$ donc $f(P(X))$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ Donc f_n va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ de plus la restriction d'une application linéaire est une application linéaire donc f_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$

20
a)
$f(1)=0+X\times1=X$ car $1=0\times T(X)+1$ et $Q(X)=0$ et $R(X)=1$. Si $P(X)=X$ $P(X^2)=X^2=1\times X^2+0$ donc ici $Q(X)=1$ et $R(X)=0$ donc $f(X)=1$. Si $P(X)=X^2$ $P(X^2)=X^4=X^2\times X^2+0$ donc ici $Q(X)=X^2$ et $R(X)=0$ donc $f(X^2)=X^2$ donc la matrice A est la matrice : $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ donc $f_2=id$ l'application identité donc f_2 est une symétrie vectorielle. Elle est bijective et son application réciproque est elle même.

21 $U(X^2)=V(X)=(X-i)(X+i)(X-1-i)(X+1+i)$ (car les racines de $V(X)$ sont $1+i$, $-1-i$, i, $-i$) donc $U(X^2)=T(X)(X-i)(X+1+i)$ donc $Q(X)=(X-i)(X+1+i)$ et $R(X)=0$ donc $f(U(X))=(X-i)(X+1+i)$.

III

22 Si $P=1$ $P(X^2)=1$ $1=0\times T(X)+1$ donc $Q(X)=0$ et $R(X)=1$ donc $f(1)=X$
Si $P=X$ $P(X^2)=X^2$ $1=0\times T(X)+X^2$ donc $Q(X)=0$ et $R(X)=X^2$ donc $f(X)=X^3$
Si $P=X^2$ $P(X^2)=X^4=(X-1)(X^3+X^2+a)+X^2-aX+a$ donc $Q(X)=X-1$ et $R(X)=$ X^2-aX+a donc $f(X^2)$ = $X-1+X(X^2-aX+a)$ = $X^3-aX^2+(a+1)X-1$. Si $P=X^3$ alors $P(X^2)=X^6=(-a-1+X-X^2+X^3)(X^3+X^2+a)+(2a+1)X^2-aX+a^2+a$ donc $Q(X)=(-a-1+X-X^2+X^3)$ et $R(X)=(2a+1)X^2-aX+a^2+a$ donc $f(X^3)=(-a-1+X-X^2+X^3)+X((2a+1)X^2-aX+a^2+a)=(2a+2)X^3+(-1-a)X^2+(1+a^2+a)X-a-1$. Donc la matrice de f_3 sur la base canonique est $B=\begin{pmatrix}0&0&-1&-a-1\\1&0&a+1&a+1+a^2\\0&0&-a&-a-1\\0&1&1&2a+2\end{pmatrix}$.

23 Pour calculer le déterminant de f_3 on calcule le déterminant de B.
Pour calculer le déterminant de B on développe suivant la première colonne donc $\det B=-\begin{vmatrix}0&-1&-a-1\\0&-a&-a-1\\1&1&2a+2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-a-1\\-a&-a-1\end{vmatrix}$ (on développe suivant la première colonne donc $\det(B)=-[-(-a-1)-(-a-1)(-a)]=-a-1+a^2+a=a^2-1$.

24. f_3 n'est pas bijective si et seulement si $\det(f_3)=a^2-1=0$ donc si et seulement si $a=1$ ou $a=-1$.

25. Si $a=-1$ donc f_3 a pour matrice $\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$.

i)

Si $P=a+bX+cX^2+dX^3$ donc $f_3(P)=-c+(a+d)X+cX^2+(b+c)X^3$ donc $f(P)=0$ si et seulement si $\begin{cases}-c=0\\a+d=0\\c=0\\b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=-d\\b=0\end{cases}$.
Donc $\ker f_3=\{a(1-X^3)\forall a\in\mathbb{R}\}$ et une base est le vecteur non nul $1-X^3$.

ii)

$\mathrm{Ker} f_3$ est de dimension 1 donc d'après le théorème du rang $Im f_3$ a pour dimension $\dim \mathbb{C}_3[X]-1=4-1=3$.Or $(1\ X, X^2, X^3)$ base de $\mathbb{C}_3[X]$ donc $(f_3(1), f_3(X), f_3(X^2), f_3(X^3))$ forme une partie génératrice de $\mathrm{Im} f_3$ or $f_3(1)=f_3(X^3)$ donc $(f_3(1), f_3(X), f_3(X^2))$ forme une partie génératrice de $\mathrm{Im} f_3$ donc une base de $Im f_3$ car c'est une partie génératrice ayant autant d'éléments que la dimension de $\mathrm{Im} f_3$.

iii) Deux sev sont supplémentaires si la réunion d'une base de l'un et d'une base de l'autre forme une base de $E=\mathbb{C}^4$ donc si $(1-X^3, X, X^3, -1+X^2+X^3)$ base de $\mathbb{C}_4[X]$. La matrice de ces 4 polynômes sur la base canonique est la matrice M : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour calculer le déterminant de M on développe suivant la deuxième colonne donc $\det(M)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc base. (On a développé suivant la deuxième ligne). Le noyau et l'image sont supplémentaires.

IV

26 Si $P(X)$ est de degré p avec $2p<n$ $P(X^2)$ est de degré $2p<n=\deg(T(X))$ donc $P(X^2)=0\times T(X)+P(X^2)$ donc $F(P)=XP(X^2)\neq 0$ donc P n'appartient pas au noyau de f.

27 Si P appartient à Ker f alors $Q(X)+XR(X)=0$ avec $Q(X)$ et $R(X)$ qui sont respectivement le reste et le quotient de la division de $P(X^2)$ par $T(X)$ donc $Q(X)=-XR(X)$ donc $P(X^2)=-XR(X)T(X)+R(X)=R(X)(-XT(X)+1)$ et $\deg(R(X))<\deg(T(X))=n$ car $R(X)$ est un reste. **Réciproquement** s'il existe $R(X)$ de degré inférieur strictement à n tel que $P(X^2)=R(X)(1-XT(X))$ alors $P(X^2)= -XR(X)T(X)+R(X)$ comme : deg $(R(X))<\deg(T(X))$ alors $R(X)$ est le reste de la division de $P(X^2)$ par $T(X)$ et $-XR(X)$ son quotient donc $f(P(X))=-XR(X)+XR(X)=0$.

28 Si P appartient à Ker f alors il existe $R(X)$ de degré q ($q< n$) et $P(X^2)=R(X)(1-XT(X))$. Or $-XT(X)$ est de degré $n+1$ donc $-1+XT(X)$ aussi donc $R(X)(1-XT(X))$ est de degré $q+n+1<n+n+1$ donc $P(X^2)$ est de degré inférieur ou égal à $2n$ donc $P(X)$ est de degré inférieur ou égal à n.

29 Si $P(X)$ est un élément du noyau. Donc il existe $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2)= R(X)(1-XT(X))$ Si k est tel que $k+\deg(P(X))\leq n$ alors $X^{2k}P(X^2)=X^{2k}R(X)(1-XT(X))$ or si $p=\deg(P(X))$ alors $2p=\deg(R(X))+n+1$ d'après la question précédente donc $2k+2p=2k+\deg(R(X))+n+1$ donc $2k+\deg(R(X)+n+1\leq 2n$ donc $2k+\deg(R(X)+1\leq n$ donc $2k+\deg(R(X)<n$ donc en utilisant la réciproque de la question **27** $X^kP(X)$ appartient au noyau.

30

a) I est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ donc possède un plus petit élément.

b) Soit a le coefficient dominant de $P_0(X)$ et b celui de $P_1(X)$ soit $c=-\dfrac{b}{a}$ Soit $P_2(X)=P_0(X)+cP_1(X)$ donc P_2 étant combinaison linéaire d'éléments de Ker f est élément de Ker f d'autre part les coefficients dominants s'annulant $P_2(X)$ est de degré strictement inférieur à d il est donc forcément nul sinon on aurait un élément de I (le degré de $P_2(X)$) strictement inférieur à d le plus élément de I.

c) Soit $Q(k)$ la proposition dépendant de k définie pour tout entier k compris entre d et n : $Q(k)$: $\forall$ $P(X)$ polynôme de degré k de ker$f$ il existe un polynôme $S(X)$ de degré $k-d$ tel que $P(X)=S(X)P_0(X)$ $Q(d)$ est vraie on l'a démontré dans la question **30b.** Soit k de $\mathbb{N}$ compris entre d et $n-1$ tel que $Q(d),\ldots, Q(k)$ sont vraies montrons que $Q(k+1)$ est vraie. Soit $P(X)$ un polynôme de Ker f de degré $k+1$ et de coefficient dominant c. $X^{k+1-d}P_0(X)$ appartient à ker$f$ d'après la question **29** donc $P(X)-\dfrac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X)$ appartient à ker f son degré est strictement inférieur à $k+1$ qui est le degré commun de $P(X)$ et de $\dfrac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X)$ car les coefficients dominants s'annulent. Si q est le degré de $(P(X)-\dfrac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X))$. Si $q<d$ alors $(P(X)-\dfrac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X))=0$ car c'est un polynôme de degré plus petit que le plus petit des degrés des polynômes non nuls. Si $d\leq q$ comme $Q(q)$ est vraie

alors il existe un polynôme $S_1(X)$ de degré $q-d$ tel que $(P(X)-\frac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X))=S_1(X)P_0(X)$ donc $P(X)=(\frac{c}{a}X^{k+1-d}+S_1(X))\ P0(X))$ de la forme $S_2(X)P_0(X)$ avec $S_2(X)=\frac{c}{a}X^{k+1-d}+S_1(X))$ donc de degré$k+1-d$. Donc $Q(k+1)$ est vraie donc pour tout k entier compris entre d et n $Q(k)$ est vraie donc tout polynôme de $Ker\ f$ est de la forme $S(X)P_0(X)$ avec $S(X)$ de degré inférieur ou égal à $n-d$. **Réciproquement :** $S(X)P_0(X)$ avec $S(X)$ de degré inférieur ou égal a $n-d$ est combinaison linéaire de polynômes de la forme $X^kP_0(X)$ (avec $k+d\leq n$) donc d'après **29** $X^kP_0(X)$ est élément de Ker$f$ donc $S(X)P_0(X)$ aussi.

31 D'après la question **25** le noyau de f_3 est l'ensemble de polynômes de la forme $c(X^3-1)$ avec c dans $\mathbb{C}$. Comme tout élément du noyau de f appartient à $\mathbb{C}_3[X]$ les noyaux de f et f_3 coïncident et on retrouve le résultat du **30c** (ici d=3 n=3 et $P_0(X)=X^3-1$.

V

32 g a la même matrice que f_2 car c'est la matrice de la même base canonique.

33 Pour tout $(U(X), V(X))$ de $\mathbb{R}_2[X]^2$ alors $<U(X), V(X)>$ appartient à $\mathbb{R}$. $<V(X), U(X)>=V(1)U(1)+V'(1)U'(1)+V''(1)U''(1) = <V(X), U(X)>$ donc $<.,.>$ est symétrique. Soit $U(X)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ $V_1(X)$ et $V_2(X)$ deux autres éléments de $\mathbb{R}_2|X]$ Soit α de $\mathbb{R}$. $<U(X),\alpha V_1(X)+V_2(X)>=U(1)(\alpha V_1(1)+V_2(1))+U'(1)(\alpha V_1'(1)+V_2'(1))+U''(1)(\alpha V_1''(1)+V_2''(1))$
$=\alpha(U(1)V_1(1)+U'(1)V_1'(1)+U''(1)V_1''(1))+U(1)V_2(1)+U'(1)V_2'(1)+U''(1)V_2''(1)$
$=\alpha<U(X),V_1(X)>+<U(X), V_2(X)>$ donc $<.,.>$ est linéaire à droite donc à gauche par symétrie donc bilinéaire.

Pour tout $U(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ $<U(X), U(X)>=U(1)^2+U'(1)^2+U''(1)^2\geq 0$ donc $<.,.>$ est positive $<U(X), U(X)>=0 \Leftrightarrow U(1)^2=U'(1)^2=U''(1)^2=0 \Leftrightarrow U(1)=U'(1)=U''(1)=0$ donc si et seulement si 1 est racine de U avec une multiplicité supérieure ou égal à 1 la seule possibilité est que $U(X)=0$ car $\deg(U(X))\geq 2$ donc $<.,.>$ est défini positif donc $<.,.>$ est bien un produit scalaire.

34 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A est symétrique et ${}^tA=A$ donc $A\times{}^tA=A\times A=I_3$ donc est bien orthogonale.

35 $<1, 1> =1\times 1=1$. Or $g(1)=X$ donc $<g(1), g(1)>=<X, X>=1+1=2\neq 1$ donc g n'est pas une isométrie vectorielle.